

UM PROGRAMA MATEMÁTICO COM RESTRIÇÕES DE COMPLEMENTARIDADE PARA A DETERMINAÇÃO DE TRAJECTÓRIAS QUASE-ESTÁTICAS COM CONTACTO E ATRITO POR UM MÉTODO DE COMPRIMENTO DE ARCO

Yoshihiro Kanno¹ e João A.C. Martins^{2*}

1: Department of Urban and Environmental Engineering
Kyoto University
Kyoto 606-8501, Japan
e-mail: kanno@archi.kyoto-u.ac.jp

2: Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura e ICIST
Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa
e-mail: jmartins@civil.ist.utl.pt

Palavras chave: Contacto, Atrito, Comprimento de Arco, MPEC, Pontos Críticos

Resumo. *Nesta comunicação propõem-se uma formulação e uma técnica de resolução novas para a determinação de trajectórias quase-estáticas em problemas bi-dimensionais com contacto e atrito, utilizando um método de comprimento de arco. Os efeitos geometricamente não lineares são tidos em conta. A metodologia proposta é aplicável a casos em que existam pontos limites e/ou sucessivos pontos de bifurcação ao longo da trajectória quase-estática. A ocorrência de pontos limites leva à utilização de métodos de comprimento de arco e a ocorrência de sucessivas (infinitamente próximas) bifurcações requer a definição de um critério de selecção da solução "desejada" entre as múltiplas soluções do problema aumentado associado ao método de comprimento de arco. O método de comprimento de arco proposto utiliza um critério de selecção baseado na máxima energia dissipada, por forma a evitar a ocorrência de troços de trajectória sem dissipação, correspondentes a descargas em que a generalidade dos nós em contacto ficassem bloqueados. Esta formulação requer a resolução, em cada incremento, de um programa matemático com restrições de complementaridade (MPEC). Após regularização, este problema é resolvido por um algoritmo convencional de programação não linear. Aplica-se a metodologia proposta a vários exemplos que envolvem a determinação de trajectórias de equilíbrio com pontos limites suaves ou angulosos e/ou com troços de trajectória quase-estática em que todos os pontos são pontos de bifurcação. Em todos os exemplos a trajectória de equilíbrio dissipativa "desejada" é de facto a trajectória determinada pelo algoritmo proposto.*

1 INTRODUÇÃO

Apesar do grande número de formulações e algoritmos disponíveis na literatura para a resolução de problemas de dimensão finita com contacto unilateral e atrito (ver, por exemplo, Wriggers [3]), os pontos críticos dessas trajectórias de equilíbrio continuam a originar importantes dificuldades matemáticas e computacionais. Este artigo desenvolve um método de comprimento de arco para determinar trajectórias de equilíbrio em problemas de contacto com atrito. É sabido que estes problemas podem ter pontos limites e sucessivos pontos de bifurcação (estáveis ou instáveis) [1, pp. 65-136], mesmo quando se admitem pequenas deformações e rotações. Isto quer dizer que o correspondente problema incremental não tem em geral soluções únicas. Hilding [4] propôs um método para a determinação do equilíbrio com um critério de energia potencial mínima para problemas elásticos geometricamente lineares envolvendo contacto com ou sem atrito. Se se admitirem rotações não infinitesimais, os pontos críticos podem também resultar da não-linearidade geométrica [1, pp. 179-232]. Miersemann e Mittelman [5] propuseram um método de continuação que permite seguir trajectórias de equilíbrio com pontos limites em problemas de contacto sem atrito. Wriggers [3] efectuou análises de problemas de contacto envolvendo dois corpos com grandes deformações; mas o seu método baseia-se na matriz de rigidez tangente, pelo que não é aplicável à determinação de trajectórias de equilíbrio com pontos críticos. Koo e Kwak [6] propuseram um método para seguir a trajectória de equilíbrio em problemas de contacto com atrito e pontos limite; contudo, não é claro que tipo de soluções serão encontradas pelo seu método se a trajectória tiver bifurcações; além disso não é garantido que exista uma solução para o problema que é resolvido pelo algoritmo utilizado em cada incremento de carga.

O nosso objectivo neste artigo é determinar trajectórias de equilíbrio contendo, possivelmente, sucessivos pontos de bifurcação devidos ao atrito, bem como pontos limite. Note-se que o nosso objectivo não é determinar a localização exacta daqueles pontos críticos, mas sim "ultrapassá-los" de acordo com um certo critério. O método proposto para determinar a trajectória de equilíbrio utiliza a parametrização do comprimento de arco e recorre a um critério de máxima dissipação de energia para *selecção* da solução incremental. Em cada passo formulamos um programa matemático com restrições de complementaridade (*MPEC*) [2], [7], que, após regularização, é resolvido com um algoritmo convencional de programação não linear.

2 Programação não linear para os problemas incrementais

Seja $\|\mathbf{p}\| = (\mathbf{p}^\top \mathbf{p})^{1/2}$ a norma euclidiana de um vector $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$. Considere-se um sistema elástico de dimensão finita no espaço a duas dimensões. Seja $\Pi(\mathbf{u}, s)$ a energia potencial total do sistema, em que $\mathbf{u} = (u_l) \in \mathbf{R}^{n^d}$ é o vector deslocamento (ou posição), $s \in \mathbf{R}$ é o parâmetro de carga e n^d é o número de graus de liberdade. Seja $\phi = (\phi_l) : \mathbf{R}^{n^d+1} \mapsto \mathbf{R}^{n^d}$ definido por $\phi_l(\mathbf{u}, s) = \partial \Pi / \partial u_l$ ($l = 1, \dots, n^d$).

A estrutura pode entrar em contacto com alguns obstáculos rígidos em n^c nós can-

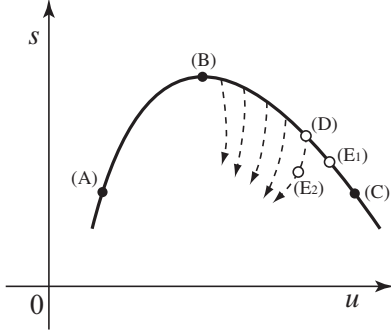


Figura 1: Ponto limite suave.

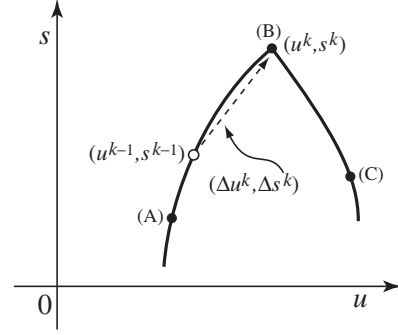


Figura 2: Ponto limite anguloso.

didatos ao contacto. Sejam $r_{ni} \in \mathbf{R}$ e $r_{ti} \in \mathbf{R}$, respectivamente, as componentes normal e tangencial da reacção no sistema de coordenadas de cada um dos candidatos ao contacto. Escrevemos $\mathbf{r}_n = (r_{n1}, \dots, r_{nn^c}) \in \mathbf{R}^{n^c}$, $\mathbf{r}_t = (r_{t1}, \dots, r_{tn^c}) \in \mathbf{R}^{n^c}$ e $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) \in \mathbf{R}^{2n^c}$. Analogamente, definem-se $u_{ni} \in \mathbf{R}$, $u_{ti} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{u}_n \in \mathbf{R}^{n^c}$ e $\mathbf{u}_t \in \mathbf{R}^{n^c}$. As condições de não-penetração clássicas (de Signorini) podem escrever-se: $\mathbf{u}_n \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_n \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{u}_n^\top \mathbf{r}_n = 0$. Por simplicidade, admitimos que as superfícies dos obstáculos têm curvatura nula e que as equações de equilíbrio têm a forma $\phi(\mathbf{u}, s) - \mathbf{T}\mathbf{r} = \mathbf{0}$, em que $\mathbf{T} \in \mathbf{R}^{n^d \times 2n^c}$ é uma matriz constante. Contudo o nosso método pode naturalmente ser generalizado para o caso de obstáculos curvos (ver, por exemplo, Martins *et al.* [1, pp. 65-136]).

Sejam \mathbf{u}^k e \mathbf{r}^k os deslocamentos nodais e as reacções, respectivamente, no passo de carga k correspondente ao parâmetro de carga s^k . $\mu > 0$ é o coeficiente de atrito. A trajectória de equilíbrio do problema quase-estático de contacto com atrito é o conjunto das sucessivas soluções $(\mathbf{u}, s) \in \mathbf{R}^{n^d+1}$ do seguinte problema incremental:

$$\phi(\mathbf{u}, s) - \mathbf{T}\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_n \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_n \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}_n^\top \mathbf{r}_n = 0, \quad (2)$$

$$r_{ti} \in \operatorname{argmin}_{r'_{ti} \in \mathbf{R}} \{r'_{ti} \Delta u_{ti} \mid \mu r_{ni} \geq |r'_{ti}|\} \quad (i = 1, \dots, n^c), \quad (3)$$

Aqui e no que se segue, $\Delta(\cdot)$ denota um incremento da variável (\cdot) . Note-se que nalguns pontos e para alguns incrementos de carga o sistema (1)–(3) pode ter várias soluções. Considere-se a trajectória de equilíbrio ilustrada na Fig.1, que mostra a variação do parâmetro de carga s com um deslocamento generalizado apropriadamente escolhido u . O nosso objectivo aqui é calcular a sequência finita $\{(u^k, s^k)\}$ que define aproximadamente a trajectória de equilíbrio (A)→(B)→(C). Como o estado de equilíbrio (B) corresponde a um ponto limite, é preciso utilizar uma parametrização do comprimento de arco para ultrapassar esse ponto.

Outra dificuldade dos problemas de contacto com atrito ocorre quando a trajectória de equilíbrio tem sucessivos pontos de bifurcação [1], de que partem sucessivas trajectórias

bifurcadas representadas por linhas a traço interrompido na Fig.1. Assim, em qualquer dos pontos entre os estados (B) e (C), um método de comprimento de arco convencional poderá seguir uma qualquer das trajectórias bifurcadas. Contudo, determinar a trajectória de equilíbrio (B)→(C) é provavelmente mais interessante do que determinar qualquer das trajectórias bifurcadas. Constata-se que o troço de trajectória (D)→(E₁) tem uma dissipação incremental devida ao atrito $W_{\text{fric}} = -\mathbf{r}_t^{k\top} \Delta \mathbf{u}_t$ que é maior do que a da trajectória (D)→(E₂). Assim a trajectória desejada (B)→(C) maximiza a dissipação de energia entre todas as possíveis trajectórias que partem de (B). Isto sugere-nos que, entre as soluções do sistema (1)–(3) em cada incremento de carga, procuremos a solução que maximiza W_{fric} .

Seja $\Delta \mathbf{u}^k := \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}$ e $\Delta s^k := s^k - s^{k-1}$. Defina-se a função $\theta(\cdot; \Delta \mathbf{u}^k, \Delta s^k, \mathbf{r}^k) : \mathbf{R}^{n^d+1} \mapsto \mathbf{R}$ por

$$\theta(\Delta \mathbf{u}, \Delta s; \Delta \mathbf{u}^k, \Delta s^k, \mathbf{r}^k) = \mathbf{r}_t^{k\top} \Delta \mathbf{u}_t - \gamma_1 (\Delta \mathbf{u}^{k\top}, \Delta s^k) (\Delta \mathbf{u}^\top, \Delta s)^\top + \frac{1}{2} \gamma_2^k \|(\Delta \mathbf{u}, \Delta s)\|^2, \quad (4)$$

em que $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2^k > 0$ são contantes. Considere-se o problema seguinte nas variáveis $(\Delta \mathbf{u}, \Delta s, \mathbf{r}) \in \mathbf{R}^{n^d} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n^c}$:

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad \theta(\Delta \mathbf{u}, \Delta s; \Delta \mathbf{u}^k, \Delta s^k, \mathbf{r}^k) \\ \text{s.t.} \quad \phi(\mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u}, s^k + \Delta s) - \mathbf{T} \mathbf{r} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}_n^k + \Delta \mathbf{u}_n \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_n \geq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{u}_n^k + \Delta \mathbf{u}_n)^\top \mathbf{r}_n = 0, \\ r_{ti} \in \underset{r'_{ti} \in \mathbf{R}}{\operatorname{argmin}} \{r'_{ti} \Delta u_{ti} \mid \mu r_{ni} \geq |r'_{ti}|\} \quad (i = 1, \dots, n^c). \end{array} \right\} \quad (5)$$

No essencial, resolvemos sucessivamente o Problema (5) determinando sucessivas soluções óptimas $(\Delta \mathbf{u}^{k+1}, \Delta s^{k+1}, \mathbf{r}^{k+1}) \in \mathbf{R}^{n^d} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n^c}$ e actualizando apropriadamente $\gamma_2^k > 0$. A sequência assim gerada $\{(\mathbf{u}^k, s^k)\}$ definida por $(\mathbf{u}^{k+1}, s^{k+1}) := (\mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u}^{k+1}, s^k + \Delta s^{k+1})$ pode considerar-se a trajectória de equilíbrio aproximada que tem a máxima dissipação de energia.

Apresentam-se agora algumas explicações relativas ao Problema (5) e à função objectivo (4).

Maximizar a dissipação incremental de energia $-\mathbf{r}_t^{k\top} \Delta \mathbf{u}_t$ é equivalente a minimizar $\mathbf{r}_t^{k\top} \Delta \mathbf{u}_t$, que aparece no Problema (5) como o primeiro termo da função objectivo (4).

O terceiro termo de (4),

$$\frac{1}{2} \gamma_2^k \|(\Delta \mathbf{u}, \Delta s)\|^2, \quad (6)$$

é motivado pela restrição esférica do método do comprimento de arco [8], que geralmente se escreve na forma

$$\|(\Delta \mathbf{u}, \Delta s)\| = \bar{S}^k. \quad (7)$$

Aqui, $\bar{S}^k \in \mathbf{R}$ denota o comprimento de arco prescrito no incremento k . Contudo, no nosso algoritmo, em vez de fixarmos o comprimento de arco \bar{S}^k explicitamente, usamos a ideia de (7) implicitamente, adicionando o termo quadrático (6) à função objectivo (4). O parâmetro γ_2^k desempenha o papel do (inverso do) raio especificado \bar{S}^k na restrição esférica (7). Este procedimento tem várias vantagens quando comparado com a utilização directa de (7) em problemas de contacto com atrito. De facto o termo de penalização (6) é fortemente convexo enquanto que a restrição (7) não é convexa. Acresce que, se usarmos (7) directamente, a existência de solução não está automaticamente garantida. Por outro lado ainda, vemos que $(\Delta \mathbf{u}, \Delta s) = \mathbf{0}$ é uma solução admissível do Problema (5), o que implica que o Problema (5) é sempre admissível. Nós actualizamos o parâmetro γ_2^k de uma forma heurística: atribuímos a γ_2^k um valor maior do que γ_2^{k-1} , se o comprimento de arco $\|(\Delta \mathbf{u}^k, \Delta s^k)\|$ do incremento k for relativamente grande.

O segundo termo de (4), $-\gamma_1(\Delta \mathbf{u}^{k\top}, \Delta s^k)(\Delta \mathbf{u}^\top, \Delta s)^\top$, é um termo de mérito que evita que se siga a trajectória de equilíbrio em sentido inverso. Nos métodos de comprimento de arco convencionais, usam-se geralmente restrições da forma

$$(\Delta \mathbf{u}^{k\top}, \Delta s^k)(\Delta \mathbf{u}^\top, \Delta s)^\top \geq 0. \quad (8)$$

Infelizmente, as trajectórias dos problemas de contacto com atrito têm frequentemente pontos angulosos [1] como o ponto (B) na Fig.2. Se juntarmos a restrição (8) ao Problema (5) em (B), então o conjunto admissível do problema que daí resulta é o ponto único $(\Delta \mathbf{u}, \Delta s) = \mathbf{0}$. Assim, adicionando o segundo termo à função objectivo (4) tem algumas vantagens por comparação com a adição de (8) às restrições.

3 Formulação MPEC e regularização

O lema seguinte prepara a reformulação em MPEC do problema de dois níveis (5):

Lema 3.1 (Secção 6 em Kanno *et al.* [9]). $r_{ti} \in \mathbf{R}$ satisfaz $r_{ti} \in \operatorname{argmin}_{r'_{ti} \in \mathbf{R}} \{r'_{ti} \Delta u_{ti} | \mu r_{ni} \geq |r'_{ti}|\}$ se e só se existe um $\lambda_{ni} \in \mathbf{R}$ satisfazendo $\lambda_{ni} \geq |\Delta u_{ti}|$, $\mu r_{ni} \geq |r_{ti}|$ e $(\lambda_{ni}, \Delta u_{ti})(\mu r_{ni}, r_{ti})^\top = 0$.

Do Lema 3.1 resulta imediatamente que o Problema (5) se reduz ao problema seguinte nas variáveis $(\Delta \mathbf{u}, \Delta s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{R}^{n^d} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n^c} \times \mathbf{R}^{n^c}$:

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad \theta(\Delta \mathbf{u}, \Delta s; \Delta \mathbf{u}^k, \Delta s^k, \mathbf{r}^k) \\ \text{s.t.} \quad \phi(\mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u}, s^k + \Delta s) - \mathbf{T}\mathbf{r} = \mathbf{0}, \\ \quad \mathbf{u}_n^k + \Delta \mathbf{u}_n \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_n \geq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{u}_n^k + \Delta \mathbf{u}_n)^\top \mathbf{r}_n = 0, \\ \quad \lambda_{ni} \geq |\Delta u_{ti}|, \quad \mu r_{ni} \geq |r_{ti}|, \quad (\lambda_{ni}, \Delta u_{ti})(\mu r_{ni}, r_{ti})^\top = 0 \quad (i = 1, \dots, n^c). \end{array} \right\} \quad (9)$$

Infelizmente o Problema (9) é difícil de resolver, uma vez que as restrições do Problema (9) não satisfazem uma qualificação standard de restrições, nomeadamente, a *independência linear* (LICQ), em nenhum ponto admissível. Assim, os métodos standard de

programação não linear provavelmente falharão neste problema [7]. Isto motiva a nossa investigação do seguinte esquema de regularização do Problema (9):

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad \theta(\Delta \mathbf{u}, \Delta s; \Delta \mathbf{u}^k, \Delta s^k, \mathbf{r}^k) \\ \text{s.t.} \quad \phi(\mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u}, s^k + \Delta s) - \mathbf{T}\mathbf{r} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}_n^k + \Delta \mathbf{u}_n \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_n \geq \mathbf{0}, \quad (u_{ni}^k + \Delta u_{ni})r_{ni} \leq \varepsilon \quad (i = 1, \dots, n^c), \\ \boldsymbol{\lambda}_n - \Delta \mathbf{u}_t \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_n + \Delta \mathbf{u}_t \geq \mathbf{0}, \quad \mu \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_t \geq \mathbf{0}, \quad \mu \mathbf{r}_n + \mathbf{r}_t \geq \mathbf{0}, \\ (\lambda_{ni}, \Delta u_{ti})(\mu r_{ni}, r_{ti})^\top \leq \varepsilon \quad (i = 1, \dots, n^c), \end{array} \right\} \quad (10)$$

em que ε é um parâmetro positivo. Para qualquer $\hat{\gamma}_2 > 0$ dado, seja $\Gamma(\hat{\gamma}_2; \Delta \mathbf{u}, \Delta s) : \mathbf{R}^{n^d+1} \mapsto \mathbf{R}$ uma função crescente de $\|(\Delta \mathbf{u}, \Delta s)\|$ satisfazendo $\Gamma(\hat{\gamma}_2; \Delta \mathbf{u}, \Delta s) > 0$. O algoritmo seguinte gera a trajectória de equilíbrio com a máxima energia dissipada:

Algoritmo 3.2. **Passo 0:** Escolher $\mathbf{u}^0, s^0, \Delta \mathbf{u}^0, \Delta s^0, \gamma_1 > 0, \gamma_2^0 > 0, k_{\max} > 0, \varepsilon^0 > 0, 0 < \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon^0, 0 < \rho < 1$, e fazer $k := 0$.

Passo 1: Se $k \geq k_{\max}$, então PARAR. Caso contrário, fazer $\varepsilon := \varepsilon^0$.

Passo 2: Determinar a solução $(\Delta \mathbf{u}, \Delta s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{R}^{n^d} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n^c} \times \mathbf{R}^{n^c}$ do sub-problema (10) com ε utilizando um método convencional de programação não linear.

Passo 3: Se $\varepsilon > \bar{\varepsilon}$, então tomar $\mathbf{u}^k := \mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u}, s^k := s^k + \Delta s$, actualizar ε como $\varepsilon := \rho\varepsilon$, e ir para o Passo 2.

Passo 4: Fazer $\Delta \mathbf{u}^{k+1} := \Delta \mathbf{u}, \Delta s^{k+1} := \Delta s$, actualizar $(\mathbf{u}^k, s^k, \mathbf{r}^k)$ e γ_2^k como $(\mathbf{u}^{k+1}, s^{k+1}, \mathbf{r}^{k+1}) := (\mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u}^{k+1}, s^k + \Delta s^{k+1}, \mathbf{r})$ e $\gamma_2^{k+1} := \Gamma(\gamma_2^k, \Delta \mathbf{u}^{k+1}, \Delta s^{k+1})$, respectivamente.

Passo 5: Fazer $k \leftarrow k + 1$, e ir para o Passo 1.

O lema seguinte justifica o procedimento adoptado de resolver uma sequência de sub-problemas (10) com $\varepsilon > 0$ a decrescer para zero, em vez do Problema (9):

Lema 3.3. *Seja $\{\varepsilon_j\} \subseteq (0, +\infty)$, com $\varepsilon_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, e seja a solução óptima \mathbf{z}_j do Problem (10), com $\varepsilon = \varepsilon_j$, um mínimo global. Se \mathbf{z}^* for um ponto de acumulação da sequência $\{\mathbf{z}_j\}$ quando $j \rightarrow \infty$, então \mathbf{z}^* é uma solução óptima global do Problema (9).*

Podemos provar o seguinte lema que garante que, em contraste com o Problema (9), e sob certas hipóteses, o Problema (10) satisfaz as LICQ standard num ponto admissível:

Lema 3.4 (Lema 4.4 em Kanno e Martins [10]). *Admita-se que o Problema (9) satisfaz MPEC-LICQ [7] em qualquer solução admissível $\mathbf{z}' := (\Delta \mathbf{u}', \Delta s', \mathbf{r}', \boldsymbol{\lambda}')$. Então existe uma vizinhança $\mathcal{U}(\mathbf{z}')$ de \mathbf{z}' e uma constante positiva $\bar{\varepsilon}$ tal que o Problem (10) satisfaz as LICQ em qualquer solução admissível $\mathbf{z} \in \mathcal{U}(\mathbf{z}')$ do Problema (10) com $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$.*

Frequentemente admitem-se condições LICQ nas análises de convergência de algoritmos convencionais para problemas de programação não linear, tais como o método de programação quadrática sequencial [11]. O Lema 3.4 implica pois que a convergência global de Algoritmo 3.2 fica garantida se usarmos esses algoritmos no passo 2.

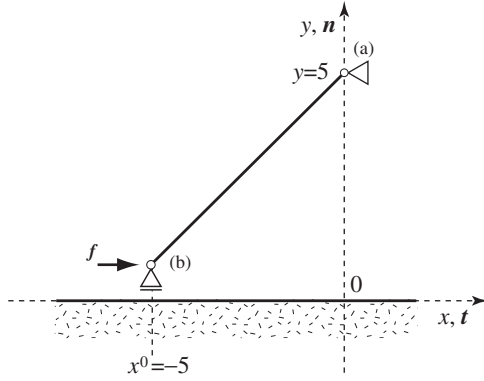


Figura 3: Uma barra elástica articulada na extremidade (a) e com contacto unilaterial com atrito na extremidade (b)

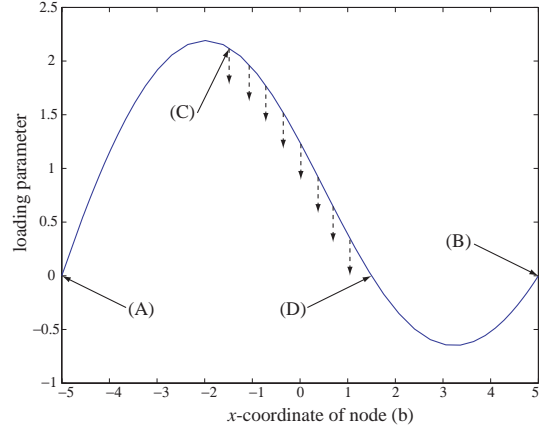


Figura 4: Trajetória de equilíbrio da extremidade da barra ($\mu = 0.3$).

4 Experiências numéricas preliminares

As trajetórias de equilíbrio dos problemas de contacto com atrito dos exemplos apresentados nesta comunicação são determinadas com o Algoritmo 3.2. Os cálculos foram efetuados num Pentium III (844MHz) com 256MB de memória utilizando MATLAB 6.5 [12]. Utiliza-se SOLNP [13] na resolução do Problema (10) no passo 2 do Algoritmo 3.2. A deformação e a tensão de Biot são utilizadas para definir a relação deformação-deslocamento geometricamente não linear e a lei de Hooke para o material elástico. No trabalho [10] podem encontrar-se outros exemplos de aplicação da metodologia proposta.

4.1 Pontos limites suaves num problema com atrito

Considere-se a barra axialmente deformável representada na Fig.3, que é análoga à do exemplo estudado analiticamente por Mróz [1, pp. 179–232]. A extremidade (a) é articulada, enquanto que a extremidade (b) é candidata ao contacto com $\mu = 0.3$, isto é, $n^d = 2$ e $n^c = 1$. Seja $\mathbf{u} = (u_x, u_y)^\top \in \mathbf{R}^2$ o vector de posição da extremidade (b). Defina-se o conjunto admissível de \mathbf{u} como $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y \geq 0\}$. A configuração inicial não deformada \mathbf{u}^0 e o correspondente comprimento inicial ℓ^0 da barra são dados por $\mathbf{u}^0 = (-5, 0)^\top$ e $\ell^0 = 5\sqrt{2}$, respectivamente. Por simplicidade, tomamos $EA\ell^0 = 100.0$, em que E e A denotam o módulo de elasticidade e a área da secção transversal da barra. As cargas exteriores $\mathbf{f} : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^{n^d}$ aplicadas no nó (b) são dadas por $\mathbf{f}(s) = (s, 0)^\top$ com $s^0 = 0$.

A Fig.4 ilustra a trajetória de equilíbrio calculada pelo Algoritmo 3.2, mostrando a variação (A)→(B) do parâmetro de carga s relativamente a u_x . O nó (b) está em contacto deslizante em todos os incrementos entre os estados (A) e (B) indicados na Fig.4. Na Fig.4 observa-se que, devidos à não linearidade geométrica, existem dois pontos limites suaves. Na mesma figura observa-se ainda que em todos os pontos entre (C) e (D) se inicia uma trajetória de descarga em que o nó (b) bloqueia. Contudo, a trajetória de equilíbrio com máxima energia é calculada sem qualquer dificuldade.

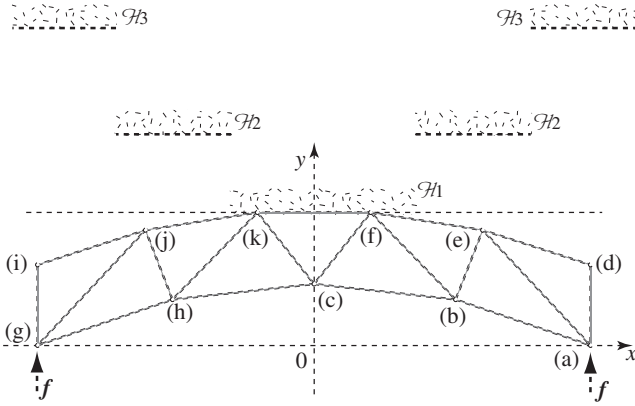


Figura 5: A 19-bar arch.

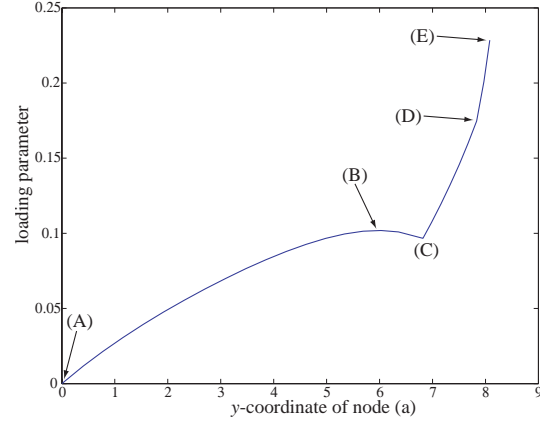


Figura 6: Equilibrium path of the 19-bar arch.

4.2 Não suavidade devido a alteração das condições de contacto

Considere-se a treliça plana representada na Fig.5. Os nós (d), (e), (f), (i), (j) e (k) são candidatos ao contacto, com $\mu = 0.2$, i.e., $n^d = 22$ e $n^c = 6$. A geometria, as forças exteriores e a distribuição de rigidez desta treliça são todas simétricas relativamente ao eixo dos y . Os obstáculos \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_3 na Fig.5 correspondem aos nós (f), (e) e (d), respectivamente, e o nó (f) está em contacto sem reacção na configuração inicial não deformada. Os conjuntos admissíveis dos nós (i), (j) e (k) são os mesmos que os dos correspondentes nós simétricos (d), (e) e (f). As cargas externas $\mathbf{f}(s) = (0, s)^\top$ são aplicadas nos nós (a) e (g). Para mais detalhes consultar [10, Section 5.3].

A trajectória de equilíbrio calculada usando o Algoritmo 3.2 está representada na Fig.6, que mostra a evolução (A)→(E) de s com a componente y do vector de posição do nó (a). Em cada incremento a solução obtida satisfaz todos as restrições com grande precisão e a configuração obtida é simétrica relativamente ao eixo dos y . O nó (f) está em contacto e desliza no sentido negativo do eixo x entre (A) e (C), ao passo que os nós (d) e (e) estão livres. Observa-se que (B) é um ponto limite suave na presença de atrito. Entre (C) e (D), os nós (e) e (f) estão em contacto e deslizam nos sentidos negativo e positivo do eixo dos x , respectivamente, enquanto que o nó (d) permanece livre; quer dizer, o ponto anguloso (C) da trajectória de equilíbrio corresponde a um ponto limite não suave devido ao estabelecimento de contacto do nó (e). Entre (D) e (E), os nós (e) e (f) estão livres e o nó (d) está em contacto e desliza no sentido negativo do eixo dos x ; quer dizer, o ponto (D) da trajectória é um ponto anguloso devido ao estabelecimento de contacto do nó (d) e à perda de contacto dos nós (e) e (f).

5 CONCLUSÕES

Propôs-se um método de comprimento de arco baseado numa formulação MPEC para a determinação de trajectórias quase-estáticas de sistemas planos de dimensão finita com

contacto unilateral e atrito. A fim de evitar seguir trajectórias de equilíbrio correspondentes a descarga, em que os nós candidatos ao contacto fiquem bloqueados, incorporou-se um critério de maximização da energia dissipada. Desenvolveu-se um esquema de regularização do MPEC que permite a resolução com um algoritmo convencional de programação não linear. Os exemplos numéricos nesta comunicação e em [10] mostram que o método proposto pode determinar as trajectórias com dissipação máxima mesmo quando estas têm pontos limite suaves devidos à não linearidade geométrica, pontos limite angulosos e sucessivos pontos de bifurcação devido ao atrito, e ainda pontos angulosos devidos a alterações das condições de contacto.

Referências

- [1] Martins, J.A.C., Raous, M. (eds). *Friction and Instabilities*. Springer-Verlag: Wien, 2002.
- [2] Luo, Z.Q., Pang, J.-S., Ralph, D. *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. Cambridge University Press: Cambridge, UK, 1996.
- [3] Wriggers, P. *Computational Contact Mechanics*. John Wiley & Sons: New York, 2002.
- [4] Hilding, D. The equilibrium state of a structure subject to frictional contact. *European J. Mech., A/Solids* **19**, 2000, 1029–1040.
- [5] Miersemann, E., Mittelmann, H.D. Continuation for parameterized nonlinear variational inequalities. *J. Comput. Appl. Math.* **26**, 1989, 23–34.
- [6] Koo J.S., Kwak B.M. Post-buckling analysis with frictional contacts combining complementarity relations and an arc-length method. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* **39**, 1996, 1161–1180.
- [7] Scholtes, S. Convergence properties of a regularization scheme for mathematical programs with complementarity constraints. *SIAM J. Optim.* **11**, 2001, 918–936.
- [8] Chrisfield, M.A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap through. *Comput. & Struct.* **13**, 1981, 55–62.
- [9] Kanno, Y., Martins, J.A.C., Pinto da Costa, A. Three-dimensional quasi-static frictional contact using second-order cone linear complementarity problem. *BGE Research Report 04-01*, Building Geoenvironment Engineering Laboratory, Kyoto University, Japan, February 2004.
- [10] Kanno, Y., Martins, J.A.C. Arc-length method for frictional contact problems by using mathematical program with complementarity constraints. *BGE Research Report*

04-02, Building Geoenvironment Engineering Laboratory, Kyoto University, Japan, May 2004.

- [11] Powell, M.J.D. Variable metric methods for constrained optimization. In: Bachem A, Grötschel M, Korte B (eds.) *Mathematical Programming: The State of the Art*. Springer-Verlag: Berlin, 1983, pp. 288–311.
- [12] The MathWorks, Inc. *Using MATLAB*. The MathWorks, Inc.: Natick, MA, 1999.
- [13] Ye, Y. SOLNP user's guide—A nonlinear optimization program in MATLAB. Dept. of Management Sciences, University of Iowa, 1989.