

## O PROBLEMA DE CONTACTO COM ATRITO EM TERMOS DE COMPLEMENTARIDADE LINEAR EM CONES DE SEGUNDA ORDEM

Y. Kanno\* J.A.C. Martins\*\* e A. Pinto da Costa\*\*\*

\* Department of Urban and Environmental Engineering  
Kyoto University  
Sakyo, Kyoto 606 – 8501, Japan  
e-mail: is.kanno@archi.kyoto-u.ac.jp

\*\* Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura  
Instituto Superior Técnico  
Avenida Rovisco Pais, 1049 – 001 Lisboa, Portugal  
e-mail: jmartins@civil.ist.utl.pt

\*\*\* Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura  
Instituto Superior Técnico  
Avenida Rovisco Pais, 1049 – 001 Lisboa, Portugal  
e-mail: apcosta@civil.ist.utl.pt

**Palavras-chave:** Atrito de Coulomb, Problema Quase–Estático Incremental, Cone de Segunda Ordem, Complementaridade, Elementos Finitos.

**Resumo.** *Resolve-se numericamente o problema quase–estático incremental para sólidos elásticos bi- e tridimensionais que podem estabelecer contacto com atrito de Coulomb com obstáculos rígidos. Formula-se o problema incremental como um Problema de Complementaridade Linear em Cones de Segunda Ordem (SOCLCP). A resolução numérica do SOCLCP é efectuada com um método desenvolvido por Hayashi, Yamashita e Fukushima (2003) que é baseado na álgebra euclideana de Jordan para cones de segunda ordem e que combina técnicas de suavização e de regularização. Apresentam-se dois exemplos numéricos: uma treliça tridimensional e um modelo plano de uma barra.*

## 1. INTRODUÇÃO

Este artigo trata de problemas quase-estáticos em que sólidos elásticos modelados pelo método dos elementos finitos podem entrar em contacto com a superfície de obstáculos rígidos com atrito. O domínio de validade da formulação apresentada é o da linearidade geométrica e material. Considera-se a lei de atrito de Coulomb para o caso tridimensional sem aproximação piramidal do cone de atrito. Aproximando o cone de atrito por uma pirâmide o problema quase-estático incremental a três dimensões pode ser formulado como um problema de complementaridade linear (LCP) [8, 9]. Não há muitos estudos que utilizem métodos de Programação Matemática e que tenham considerado o cone de atrito de Coulomb sem qualquer aproximação [2, 3, 11, 4, 6].

Seguidamente expõe-se uma formulação matemática e um método numérico para a resolução do problema quase-estático incremental com atrito de Coulomb a três dimensões sem aproximação piramidal. Para isso exprime-se a versão incremental da lei de atrito como uma condição de complementaridade em que as variáveis estáticas e cinemáticas nela intervenientes pertencem ao mesmo cone convexo, o que permite escrever o problema incremental na forma canónica de um *problema de complementaridade linear em cones de segunda ordem* (SOCLCP — second-order cone linear complementarity problem).

## 2. FORMULAÇÃO EM TERMOS DE UM SOCLCP

Seja  $\mathcal{K} \subset \mathbf{R}^n$  um cone convexo fechado e  $\mathcal{K}^* \subset \mathbf{R}^n$  o seu dual [10], definido por

$$\mathcal{K}^* = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{y} \geq 0 \ (\mathbf{x} \in \mathcal{K})\}.$$

O cone  $\mathcal{K}$  diz-se *auto-dual* se for igual ao seu dual [1]. O ortante não negativo  $\mathbf{R}_+^n \subset \mathbf{R}^n$  e o *cone de segunda ordem* (ou de *Lorentz*)  $\mathbf{L}_+^n \subset \mathbf{R}^n$  [1] definem-se, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_+^n &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, n)\} \text{ e} \\ \mathbf{L}_+^n &= \{\mathbf{x} = (x_0, \mathbf{x}_1) \in \mathbf{R}^n \mid x_0 \geq \|\mathbf{x}_1\|\}. \end{aligned}$$

Ser-nos-á particularmente útil o caso do cone auto-dual  $\mathbf{L}_+^3$ , ilustrado na Figura 1.

Neste estudo fazemos uso do *problema de complementaridade linear em cones de segunda ordem* (SOCLCP). Dados uma matriz  $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  e um vector  $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ , o problema SOCLCP consiste em

$$\left. \begin{array}{l} \text{calcular } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}^{2n} \\ \text{sujeito a } \mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{q}, \\ \mathbf{x} \in \mathcal{K}_S, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{K}_S, \quad \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = 0, \end{array} \right\} \quad (1)$$

onde

$$\mathcal{K}_S := \mathcal{K}_1 \times \dots \times \mathcal{K}_k, \quad \mathcal{K}_i = \mathbf{R}_+^{n_i} \text{ ou } \mathbf{L}_+^{n_i},$$

com  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ . Devido à igualdade  $\mathbf{L}_+^1 = \mathbf{R}_+^1$  o SOCLCP (1) tem o LCP (problema de complementaridade linear) como caso particular. Hayashi *et al.* [5] propuseram um algoritmo baseado na álgebra euclideana de Jordan que incorpora métodos de suavização e regularização

para resolver numericamente SOCLCP's e que será usado neste estudo.

Em [7] mostra-se que, pela incorporação de uma nova variável, a lei de atrito de Coulomb pode ser formulada como uma condição de complementaridade em dois cones de segunda ordem, resultado que se indica seguidamente. Admitindo que a superfície do obstáculo é suficientemente suave, para cada nó candidato ao contacto no espaço tridimensional podemos definir um referencial ortonormado  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$  em que  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathbf{R}^3$  e  $\mathbf{n} \in \mathbf{R}^3$  são vectores respectivamente tangentes e normal exterior ao obstáculo. O vector dos deslocamentos incrementais do nó designa-se por  $(\Delta \mathbf{u}_t, \Delta u_n) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$  e o vector das reacções do obstáculo sobre o nó designa-se por  $(\mathbf{r}_t, r_n) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ , em que os índices inferiores 't' e 'n' denotam componentes relativamente aos eixos  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$  e  $\mathbf{n}$ , respectivamente. As reacções normais satisfazem as desigualdades  $r_n \geq 0$ , uma vez que, em contacto unilateral sem adesão, as mesmas só podem ser de compressão. A versão incremental da lei de Coulomb pode escrever-se como

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_t = \mathbf{0} \implies \mu r_n \geq \|\mathbf{r}_t\| & \text{(condição de bloqueamento),} \\ \Delta \mathbf{u}_t \neq \mathbf{0} \implies \mathbf{r}_t = -\mu r_n \frac{\Delta \mathbf{u}_t}{\|\Delta \mathbf{u}_t\|} & \text{(condição de deslizamento).} \end{cases} \quad (2)$$

em que  $\mu > 0$  designa o coeficiente de atrito. Pode-se mostrar [7] que  $\Delta \mathbf{u}_t \in \mathbf{R}^2$  e  $(\mathbf{r}_t, r_n) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$  satisfazem (2) se e só se existir um  $\lambda_n \in \mathbf{R}$  tal que

$$(\lambda_n, \Delta \mathbf{u}_t) \cdot (\mu r_n, \mathbf{r}_t) = 0, \quad (3)$$

$$\lambda_n \geq \|\Delta \mathbf{u}_t\|, \quad \mu r_n \geq \|\mathbf{r}_t\|. \quad (4)$$

As inequações (4) são condições de pertença das variáveis envolvidas na lei de Coulomb  $(\Delta \mathbf{u}_t, \mu r_n, \mathbf{r}_t)$  e de uma nova variável ( $\lambda_n$ ) a cones de segunda ordem (ilustrados na Figura 1).

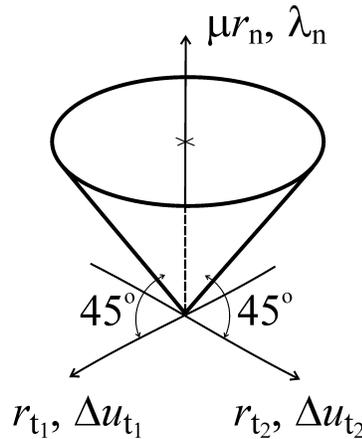


Figura 1. Cones de segunda ordem envolvidos na nova formulação da lei de atrito de Coulomb ( $\mathbf{L}_+^3$ ).

Consideremos agora um sistema elástico linear tridimensional de dimensão finita com  $n^D$

graus de liberdade. Os vectores dos deslocamentos e das reacções nodais num estado de equilíbrio correspondente às forças exteriores  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}^0 \in \mathbf{R}^{n^D}$  são, respectivamente,  $\widehat{\mathbf{u}}^0 \in \mathbf{R}^{n^D}$  e  $\widehat{\mathbf{r}}^0 \in \mathbf{R}^{n^D}$ , que satisfazem a equação de equilíbrio

$$\widehat{\mathbf{K}}\widehat{\mathbf{u}}^0 = \widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}^0 + \widehat{\mathbf{r}}^0, \quad (5)$$

onde  $\widehat{\mathbf{K}} \in \mathbf{R}^{n^D} \times \mathbf{R}^{n^D}$  representa a matriz de rigidez (simétrica). O número de nós candidatos ao contacto é  $n^C$  e o número de graus de liberdade não associados ao contacto é  $n^F$ , pelo que  $n^F = n^D - 3n^C$ . Os índices superiores C e F referem-se, respectivamente, aos nós que são e que não são candidatos ao contacto. Um  $\Delta$  precedendo uma variável denota um incremento finito dessa variável. A versão incremental das equações de equilíbrio (5) é

$$\widehat{\mathbf{K}}\Delta\widehat{\mathbf{u}} = \Delta\widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext}} + \Delta\widehat{\mathbf{r}}, \quad (6)$$

onde as entidades intervenientes podem ser decompostas em blocos:

$$\widehat{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{\text{FF}} & \mathbf{K}^{\text{FC}} \\ \mathbf{K}^{\text{CF}} & \mathbf{K}^{\text{CC}} \end{pmatrix}, \quad \Delta\widehat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{u}^{\text{F}} \\ \Delta\mathbf{u}^{\text{C}} \end{pmatrix}, \quad \Delta\widehat{\mathbf{f}}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{F}} \\ \Delta\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{C}} \end{pmatrix}, \quad \Delta\widehat{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{r}^{\text{C}} \end{pmatrix}.$$

A distância actual entre o  $i$ -ésimo nó candidato ao contacto e o obstáculo, medida na direcção normal ao obstáculo, é designada por  $g_i^0$  ( $i = 1, \dots, n^C$ ). As condições de contacto unilateral envolvem duas desigualdades (a condição de impenetrabilidade e a condição de não adesão) e uma relação de complementaridade (condição de não ocorrência simultânea de reacção normal e de ausência de contacto)

$$\Delta u_{ni}^{\text{C}} - g_i^0 \geq 0, \quad r_{ni}^{\text{C}} \geq 0, \quad (\Delta u_{ni}^{\text{C}} - g_i^0)r_{ni}^{\text{C}} = 0 \quad (i = 1, \dots, n^C). \quad (7)$$

Por simplicidade de notação passamos a omitir o índice superior C além de que efectuamos uma mudança de variável no incremento de deslocamento normal

$$\Delta u_{ni} = \Delta u_{ni}^{\text{C}} - g_i^0, \quad \Delta \mathbf{u}_{ti} = \Delta \mathbf{u}_{ti}^{\text{C}}, \quad \Delta \mathbf{u} = (\Delta \mathbf{u}_{t1}, \dots, \Delta \mathbf{u}_{tn^C}, \Delta u_{n1}, \dots, \Delta u_{nn^C}), \\ r_{ni} = r_{ni}^{\text{C}}, \quad \mathbf{r}_{ti} = \mathbf{r}_{ti}^{\text{C}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}^{\text{C}},$$

pelo que as condições em (7) se reduzem a

$$\Delta u_{ni} \geq 0, \quad \Delta r_{ni} \geq 0, \quad \Delta u_{ni}r_{ni} = 0 \quad (i = 1, \dots, n^C). \quad (8)$$

Após condensação da equação de equilíbrio (6) nos graus de liberdade candidatos ao contacto obtemos uma equação de equilíbrio envolvendo apenas as variáveis estáticas e cinemáticas de contacto:

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{u} = \mathbf{r} + \mathbf{f}. \quad (9)$$

Na equação anterior a matriz simétrica  $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{3n^C \times 3n^C}$  e o vector  $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^{3n^C}$  são dados por

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{\text{CC}} - \mathbf{K}^{\text{CF}}(\mathbf{K}^{\text{FF}})^{-1}\mathbf{K}^{\text{FC}}, \\ \mathbf{f} = \mathbf{r}^{0\text{C}} + \Delta\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{C}} + \mathbf{K}^{\text{CF}}(\mathbf{K}^{\text{FF}})^{-1}\Delta\mathbf{f}_{\text{ext}}^{\text{F}} - \mathbf{K}\mathbf{g}^0,$$

onde  $\mathbf{g}^0 = (\mathbf{0}, g_1^0, \dots, g_{n^C}^0) \in \mathbf{R}^{3n^C}$  e  $\mathbf{r}^{0^C} \in \mathbf{R}^{3n^C}$ . As condições (9), (8), (3) e (4) permitem formular o SOCLCP seguinte:

$$\left. \begin{array}{l} \text{calcular } (\Delta \mathbf{u}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}_n) \in \mathbf{R}^{3n^C} \times \mathbf{R}^{3n^C} \times \mathbf{R}^{n^C} \\ \text{sujeito a } \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{r} + \mathbf{f}, \\ \Delta u_{ni} \geq 0, \quad r_{ni} \geq 0, \quad \Delta u_{ni} r_{ni} = 0 \quad (i = 1, \dots, n^C), \\ \lambda_{ni} \geq \|\Delta \mathbf{u}_{ti}\|, \quad \mu r_{ni} \geq \|\mathbf{r}_{ti}\|, \\ (\lambda_{ni}, \Delta \mathbf{u}_{ti}) \cdot (\mu r_{ni}, \mathbf{r}_{ti}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n^C). \end{array} \right\} \quad (10)$$

Definindo o cone  $\mathcal{K}_1 \subset \mathbf{R}^{3n^C}$  como

$$\mathcal{K}_1 = \{(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \in \mathbf{R}^{n^C} \times \mathbf{R}^{2n^C} \mid s_i \geq \|\mathbf{s}_{2i}\| \ (i = 1, \dots, n^C)\}, \quad (11)$$

onde  $\mathbf{s}_1 = (s_{11}, \dots, s_{1n^C})$ ,  $\mathbf{s}_2 = (s_{21}, \dots, s_{2n^C})$  e  $\mathbf{s}_{2i} \in \mathbf{R}^2$  ( $i = 1, \dots, n^C$ ), e decompondo o sistema de equações (9) na partes tangente e normal

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_t \\ \mathbf{K}_n \end{pmatrix} \Delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_t \\ \mathbf{r}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{f}_t \\ \mathbf{f}_n \end{pmatrix},$$

onde  $\mathbf{K}_t \in \mathbf{R}^{2n^C \times 3n^C}$ ,  $\mathbf{K}_n \in \mathbf{R}^{n^C \times 3n^C}$ ,  $\mathbf{f}_t \in \mathbf{R}^{2n^C}$  e  $\mathbf{f}_n \in \mathbf{R}^{n^C}$ , então o problema (10) toma a forma canónica de um SOCLCP (1) com

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_n \\ \Delta \mathbf{u}_t \\ \Delta \mathbf{u}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mu \mathbf{r}_n \\ \mathbf{r}_t \\ \mathbf{r}_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_S = \mathcal{K}_1 \times \mathbf{R}_+^{n^C}, \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mu \mathbf{K}_n \\ \mathbf{O} & \mathbf{K} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -\mu \mathbf{f}_n \\ -\mathbf{f} \end{pmatrix}, \quad n = 4n^C. \end{aligned}$$

### 3. DOIS EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nos exemplos numéricos apresentados seguidamente os SOCLCP's (10) são resolvidos com o algoritmo proposto por Hayashi, Yamashita e Fukushima [5]. Adoptam-se os valores dos parâmetros do algoritmo que foram usados nas experiências numéricas relatadas por aqueles autores. A solução inicial arbitrada para cada incremento de carga é  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{y}^0 = \mathbf{0}$ .

#### 3.1. Treliças tridimensionais

Vamos agora considerar treliças tridimensionais constituídas por duas malhas rectangulares de barras dispostas em dois planos paralelos, ligadas por um sistema de barras inclinadas. A Figura 2 ilustra uma treliça com  $4 \times 4$  nós candidatos ao contacto (os do plano inferior ( $x$ - $y$ )) embora neste estudo só se apresentem resultados numéricos para uma treliça com  $12 \times 12$  nós candidatos ao contacto. Os comprimentos das barras nas direcções  $x$  e  $y$  são 2000,0 mm e 3000,0 mm, respectivamente, sendo a distância entre o plano superior e o plano inferior de 2000,0 mm. O módulo de elasticidade  $E = 205,8$  GPa e a área da secção transversal de cada barra  $A = 10000,0$  mm<sup>2</sup>. Os nós do plano superior serão carregados segundo o critério seguinte (ver a Figura 2): se cada nó do interior da malha rectangular superior (nós indicados por

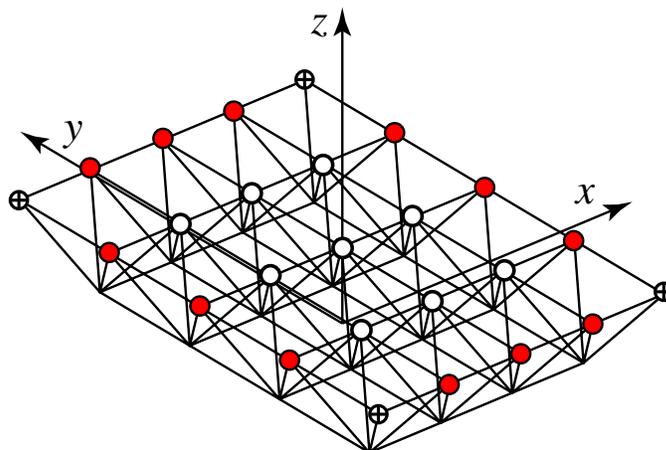


Figura 2. Treliça com  $4 \times 4$  nós candidatos ao contacto.

○) estiver submetido a uma força  $\hat{f}$  então os nós dos bordos indicados por ● estão submetidos a uma força de  $\hat{f}/2$  e os nós dos cantos (indicados por ⊕) estão submetidos a uma força de  $\hat{f}/4$ . O obstáculo ocupa a região  $z \leq 0$ . No início do carregamento a distância entre os nós candidatos ao contacto e a superfície é nula, ou seja,  $g_i^0 = 0$  ( $i = 1, \dots, n^C$ ). O coeficiente de atrito é  $\mu = 0,12$ . Note-se que a geometria, a distribuição da rigidez, as distâncias iniciais ao obstáculo e o coeficiente de atrito são simétricos em relação aos planos  $xz$  e  $yz$ .

Seguidamente mostram-se os resultados da resolução numérica do problema quase-estático incremental para uma treliça com  $12 \times 12$  nós candidatos ao contacto. Consideramos 6 passos de carga tal que a carga total em cada nó interior do plano superior de nós é dada por

$$\hat{f} = \gamma^{(m)} \bar{f} \quad (m = 0, \dots, 6), \quad (12)$$

onde  $\bar{f} = (0, 0, -102,9)$  kN e os valores de  $\gamma^{(m)}$  são os listados na Tabela 1; quer dizer, ao longo dos incrementos de carga  $m = 2, \dots, 6$  as forças exteriores aplicadas quando  $m = 1$  são monotonamente removidas. A Figura 3 mostra os incrementos de deslocamentos dos nós

$m$	0	1	2	3	4	5	6
$\gamma^{(m)}$	0	5,00	4,05	3,10	2,15	1,20	0,25

Tabela 1. Valores do parâmetro de carga  $\gamma^{(m)}$  da treliça  $12 \times 12$ .

candidatos ao contacto. Mostra-se apenas  $1/4$  da malha rectangular dos nós do plano inferior por razões de simetria; em todos os incrementos todos os nós estão em contacto com o obstáculo. A Figura 4 ilustra o padrão de deslocamentos totais para a carga final ( $m = 6$ ).

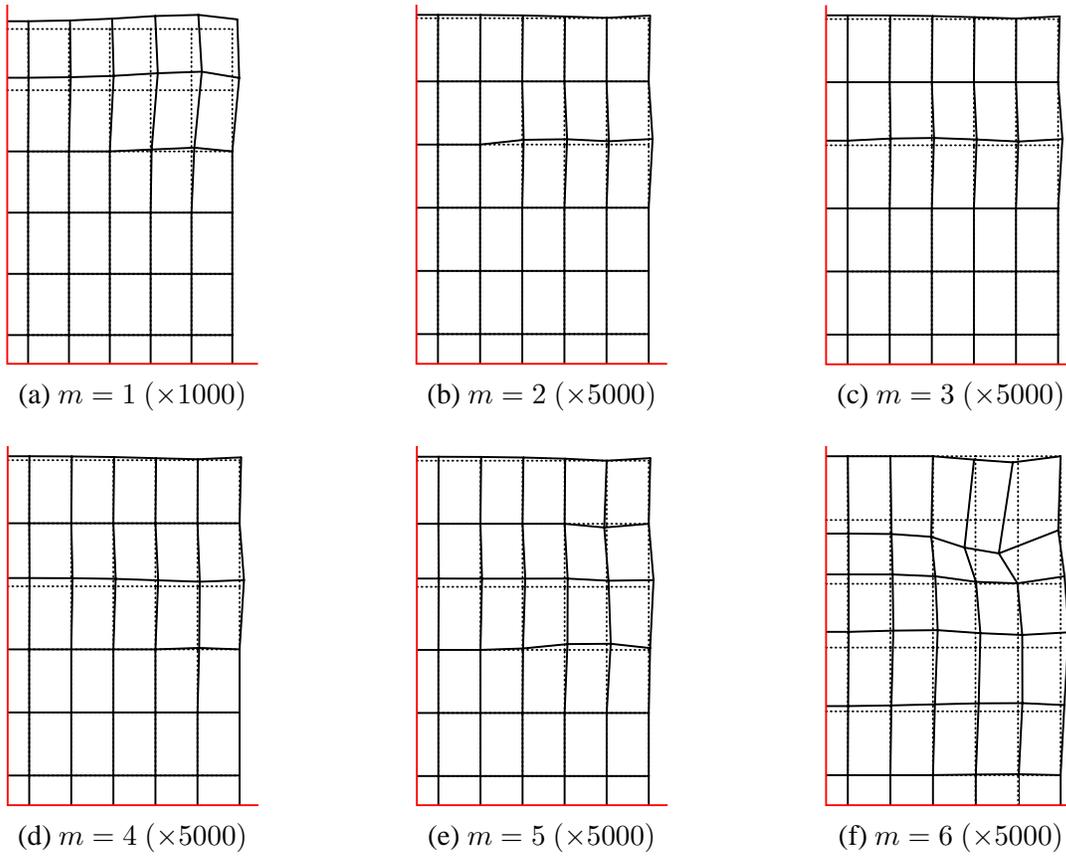


Figura 3. Incrementos de deslocamentos dos nós candidatos ao contacto (coeficientes de ampliação indicados entre parêntesis).

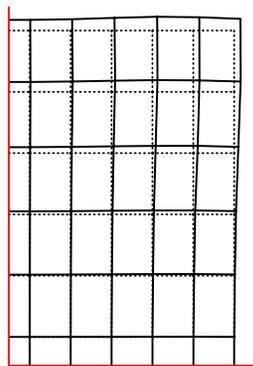


Figura 4. Deslocamentos totais dos nós candidatos ao contacto para  $m = 6 (\times 1000)$ .

### 3.2. Barra em estado plano de deformação submetida a forças distribuídas

Neste exemplo consideramos uma barra elástica linear (módulo de elasticidade  $E = 5$  MPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,48$ ) num estado plano de deformação, ocupando um domínio de  $400 \text{ mm} \times 40 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$  (Figura 5). Despreza-se o peso próprio. A barra foi discretizada em

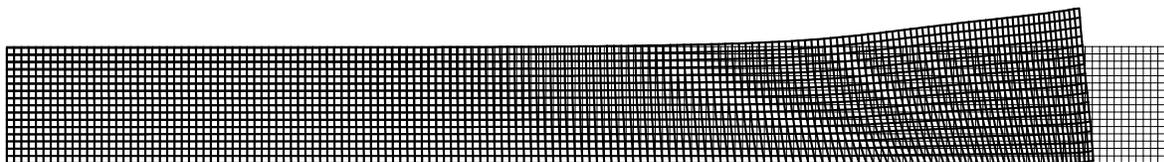


Figura 5. Configuração deformada do modelo de elementos finitos de uma barra em estado de equilíbrio correspondente a tensões normais de compressão de 0,01 MPa na face superior e de 0,05 MPa na face direita (deslocamentos ampliados 50 vezes).

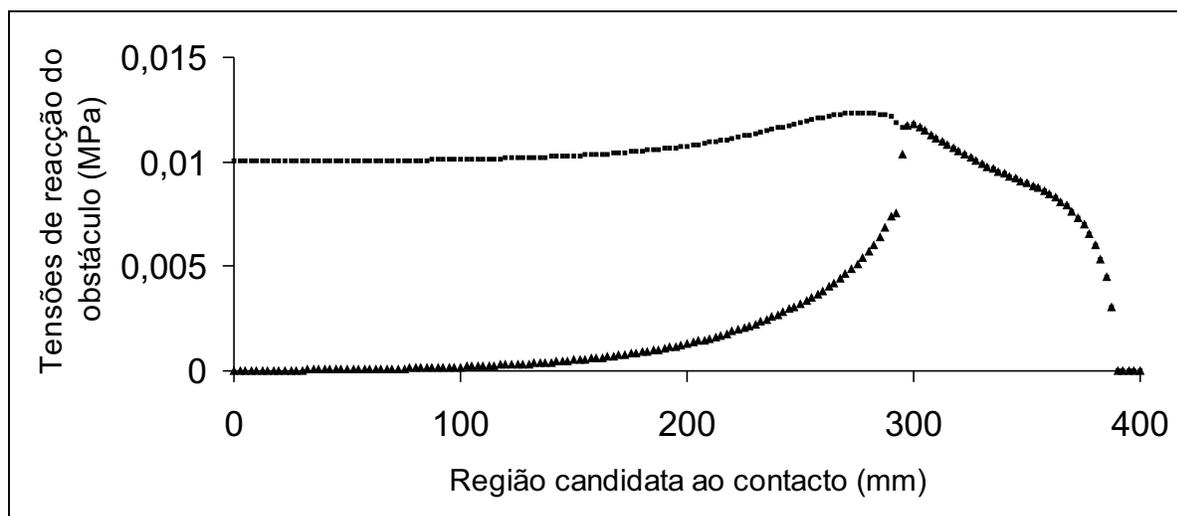


Figura 6. Representação esquemática das tensões de reação normais (■) e das tensões de reação tangenciais divididas pelo coeficiente de atrito (▲) para o estado de equilíbrio correspondente à configuração representada na Figura 5.

$16 \times 160 = 2560$  elementos finitos bilineares (Q1). A face esquerda da barra coincide com um eixo de simetria, pelo que os nós coincidentes com essa face estão impedidos de ter componente horizontal de deslocamento. Os 161 nós da face inferior estão sujeitos a condições de contacto unilateral com atrito com  $\mu = 1,3$ . As faces superior e direita são sujeitas a tensões uniformes de compressão: num primeiro carregamento aplicam-se tensões iguais a 0,01 MPa nessas faces, seguido de 4 incrementos de 0,01 MPa (sempre de compressão) apenas na face direita. Para a configuração representada na Figura 5, dos 161 nós candidatos ao contacto, os 119 do lado

esquerdo estão bloqueados, os 5 do lado direito estão fora do contacto e os 37 intermédios estão em deslizamento iminente para a esquerda. O nó do canto superior direito desloca-se 0,641 mm para a esquerda e 0,263 mm para cima. As tensões de reacção do obstáculo sobre a barra estão representadas na Figura 6; as tensões tangenciais apontam, naturalmente, para a direita.

**Agradecimentos.** Os autores agradecem ao Prof. M. Fukushima e ao Dr. S. Hayashi (Universidade de Quioto, Japão) por terem permitido o uso do software que resultou da implementação do algoritmo proposto em [5]. Os autores agradecem também ao Eng. Nelson Pereira o apoio informático prestado.

## REFERÊNCIAS

- [1] A. Ben-Tal, A. Nemirovski, *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*. SIAM: Philadelphia (2001).
- [2] P.W. Christensen, J.-S. Pang, Frictional contact algorithms based on semismooth Newton methods. In *Reformulation—Nonsmooth, Piecewise Smooth, Semismooth and Smoothing Methods*, M. Fukushima, L. Qi (eds). Kluwer Academic Publishers: Boston, MA, 81-116 (1999).
- [3] J.A. Garrido, A. Foces, F. París, An incremental procedure for three-dimensional contact problems with friction. *Comput. & Struct.*, **50**, 201-215 (1994).
- [4] C. Glocker, Formulation of spatial contact situations in rigid multibody systems. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **177**, 199-214 (1999).
- [5] S. Hayashi, N. Yamashita, M. Fukushima, A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems, *Technical Report 2003-002*, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, February (2003).
- [6] L. Johansson, A. Klarbring, Study of frictional impact using a nonsmooth equations solver. *J. Appl. Mech. (ASME)*, **67**, 267-273 (2000).
- [7] Y. Kanno, J.A.C. Martins, A. Pinto da Costa, Three-dimensional quasi-static frictional contact by using second-order linear complementarity problem. (submetido).
- [8] A. Klarbring, A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **58**, 175-200 (1986).
- [9] A. Klarbring, J.-S. Pang, Existence of solutions to discrete semicoercive frictional contact problems. *SIAM J. Optim.*, **8**, 414-442 (1998).
- [10] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*. Princeton University Press (1970).
- [11] N. Strömberg, A Newton method for three-dimensional fretting problems. *Int. J. Solids Struct.*, **36**, 2075-2090 (1999).