半正定値計画法に対する主双対内点法の群対称性

寒野 善博 *, 大崎 純 *, 室田 一雄 **, 加藤 直樹 *

* 京都大学大学院工学研究科 建築学専攻
** 京都大学 数理解析研究所
東京大学大学院 情報理工学研究科

半正定値計画法

(Semi-Definite Program : SDP)

1. 数理計画法の1つ, 凸計画法
2. 線形計画法, 凸2次計画法などを含む
3. 主双対内点法
   - 問題のサイズの多項式時間で最適解が得られる
   - 実用的で高速なソフトウェア
4. 応用
   - システム制御
   - 組合せ最適化問題
   - 構造最適化
     - 外力仕事の最小化 (Ben-Tal and Nemirovski, 1997)
     - 1次固有振動数制約 (Ohsaki *et al.*, 1999)
     - 線形座屈荷重係数制約 (Kanno *et al.*, 2000)

SDP の等式標準形:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}:\ & \text{min} \quad \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{X} \\
& \text{s.t.} \quad \boldsymbol{A}_p \bullet \boldsymbol{X} = b_p \quad (p = 1, \cdots, m), \\
& \qquad\ \ \boldsymbol{X} \in \mathcal{S}^n_+; \\
\mathcal{D}:\ & \text{max} \quad \sum_{p=1}^{m} b_p z_p \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{p=1}^{m} \boldsymbol{A}_p z_p + \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}, \\
& \qquad\ \ \boldsymbol{Y} \in \mathcal{S}^n_+.
\end{aligned}$$

記号の定義:

$$\boldsymbol{U} \in \mathcal{S}^n_+ \iff \boldsymbol{U} \in \Re^{n\times n}: \text{対称, 半正定値}$$

$$\boldsymbol{U} \in \mathcal{S}^n_{++} \iff \boldsymbol{U} \in \Re^{n\times n}: \text{対称, 正定値}$$

変数:

$$\boldsymbol{X} \in \mathcal{S}^n, \quad \boldsymbol{Y} \in \mathcal{S}^n, \quad \boldsymbol{z} \in \Re^m$$

定数:

$$\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_m \in \mathcal{S}^n, \quad \boldsymbol{b} \in \Re^m, \quad \boldsymbol{C} \in \mathcal{S}^n$$

行列の内積:

$$\boldsymbol{U} \bullet \boldsymbol{V} = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{V}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} U_{i,j} V_{i,j}$$

指定1次固有振動数を有する最適設計

- 部材, 節点の配置を固定.
- 部材断面積が変数.

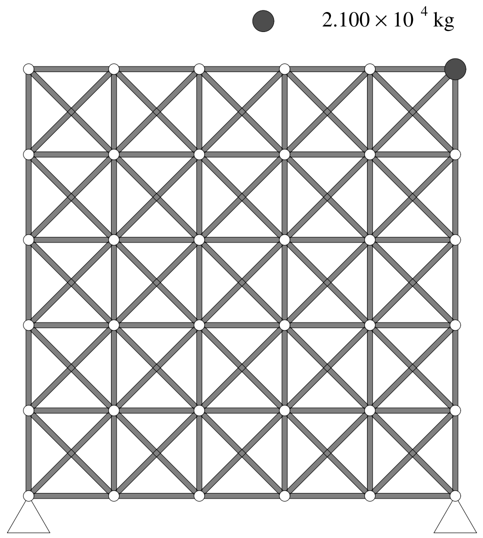


Fig. 1: 初期トラス.

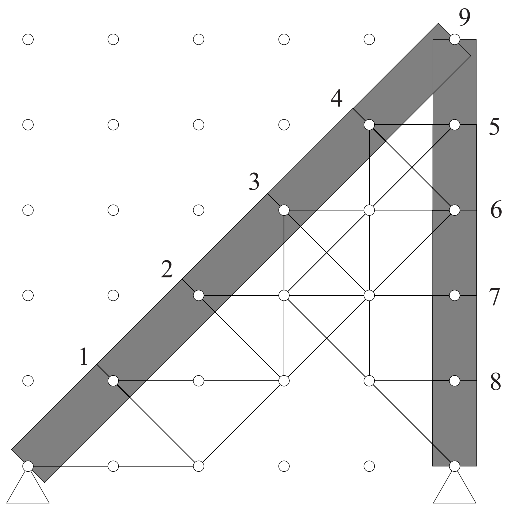


Fig. 2: 最適解.

固有振動数 Ω_r:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}_r = \Omega_r(\boldsymbol{M}_s + \boldsymbol{M}_0)\boldsymbol{\Phi}_r \quad (r = 1, \cdots, n).$$

$\boldsymbol{K}$: 線形剛性行列

$\boldsymbol{M}_s$: 質量行列 (構造質量)

$\boldsymbol{M}_0$: 質量行列 (非構造質量)

構造最適化問題:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{p=1}^{N^m} b_p z_p \\ \text{s.t.} \quad & \Omega_r \geq \bar{\Omega}, \quad (r = 1, \cdots, n), \\ & z_p \geq \bar{z}_p, \quad (p = 1, \cdots, m). \end{aligned}$$

$\boldsymbol{z} = (z_p)$: 部材断面積

$\boldsymbol{b} = (b_p)$: 部材長

$\bar{\Omega}$: 指定1次固有値

目的関数: 部材の総体積

SDP としての定式化

$$\begin{aligned} \mathcal{D}' : \ \text{max} \quad & -\sum_{p=1}^{m} b_p z_p \\ \text{s.t.} \quad & -\sum_{p=1}^{m} (\boldsymbol{K}_p - \bar{\Omega} \boldsymbol{M}_p) z_p + \boldsymbol{Y} = -\bar{\Omega} \boldsymbol{M}_0, \\ & \boldsymbol{Y} \in \mathcal{S}_+^n, \ z_p \geq \bar{z}_p \quad (p = 1, \cdots, m). \end{aligned}$$

定行列

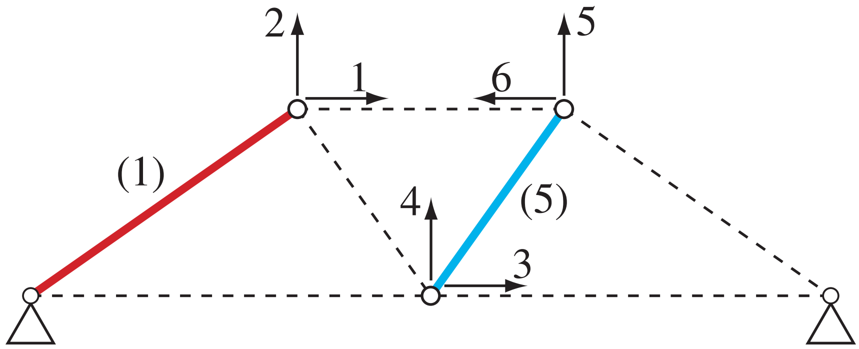
$\boldsymbol{K}_p$: 部材剛性行列

$\boldsymbol{M}_p$: 部材質量行列

$\boldsymbol{M}_0$: 非構造質量行列

定数 b_p, 定行列 $\boldsymbol{K}_p$

- b_1：部材 (1) の長さ



- 行列 $\boldsymbol{K}_p$：部材 p の特性 $(\in \mathcal{S}^6)$
- $\boldsymbol{K}_p$ の成分：行, 列が節点座標の番号に対応
  - $\boldsymbol{K}_1$：部材 (1); 非零要素 (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)
  - $\boldsymbol{K}_5$：部材 (5); 非零要素 (3,3), (3,4), $\cdots$, (6,6)

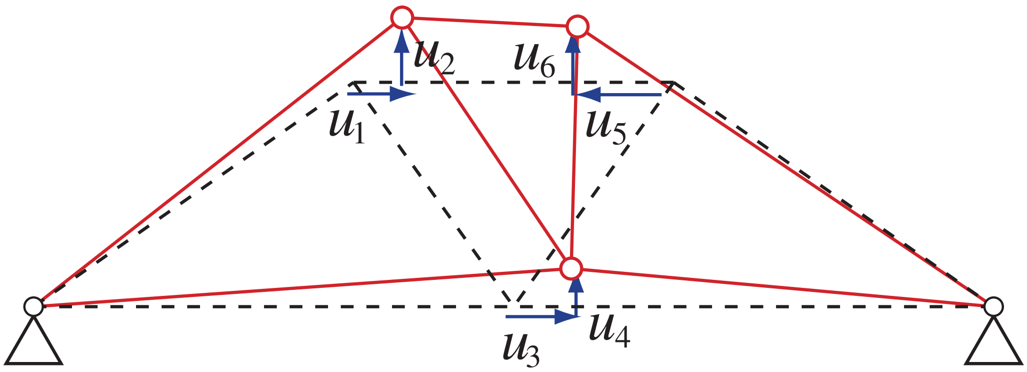


Fig. 3: 節点の変位.

研究の背景:

1. 構造物の最適設計
   (a) 対称な形状を指定
   (b) 断面積 $\boldsymbol{z}$ を最適化
2. 問題点
   (a) 対称な最適解 $\boldsymbol{z}^*$ が常に求まるか?
   (b) 対称解: $z_1^* = z_7^*$, $z_2^* = z_6^*$, $z_3^* = z_5^*$?
3. 数値実験 (Ohsaki *et al.*, 1999):
   (a) IPM : 対称解.
   (b) SQP : 非対称な解.

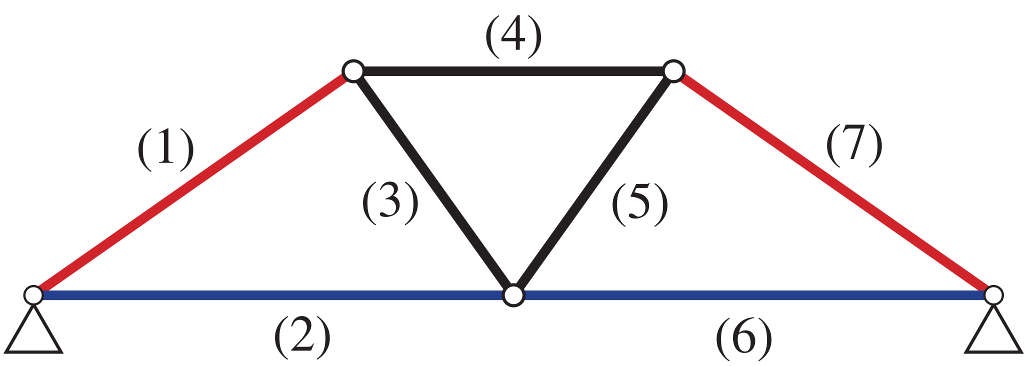


Fig. 4: 対称な形状のトラス.

研究の目的:

1. 理論的な根拠
   (a) 対称なSDPの定義
      i. 群表現論
   (b) 内点法の解の対称性
      i. 中心パス (CP_μ) の対称性
      ii. 内点法の探索方向の対称性
2. 応用例 — トラスの最適設計

定義:

1. G : 有限群
2. $\boldsymbol{P}$: 群 G の n 次表現,
   $\boldsymbol{D}$: 群 G の m 次表現.

- 各 $g,\ h \in G$ に対し,
  1. $\boldsymbol{P}(g)$ は $n \times n$ 正則行列
  2. $\boldsymbol{P}(g)\boldsymbol{P}(h) = \boldsymbol{P}(gh)$

SDP($\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{C}$):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: \ & \text{min} \ \ \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{X} \\ & \text{s.t.} \ \ \boldsymbol{A}_p \bullet \boldsymbol{X} = b_p \ (i = 1, \cdots, m), \ \ \boldsymbol{X} \in \mathcal{S}^n_+; \\ \mathcal{D}: \ & \text{max} \ \sum_{p=1}^{m} b_p z_p \\ & \text{s.t.} \ \sum_{p=1}^{m} \boldsymbol{A}_p z_p + \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}, \ \ \boldsymbol{Y} \in \mathcal{S}^n_+. \end{aligned}$$

$g \in G$ のSDPの解に対する作用:

$$g : (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{z}) \mapsto (\widetilde{\boldsymbol{X}}(g), \widetilde{\boldsymbol{Y}}(g), \widetilde{\boldsymbol{z}}(g))$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{X}}(g) &= \boldsymbol{P}(g)^{-1} \boldsymbol{X} \boldsymbol{P}(g)^{-\top}, \\ \widetilde{\boldsymbol{Y}}(g) &= \boldsymbol{P}(g)^{\top} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{P}(g), \\ \widetilde{\boldsymbol{z}}(g) &= \boldsymbol{D}(g)^{-1} \boldsymbol{z}. \end{aligned}$$

解$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{z})$が$G$対称:

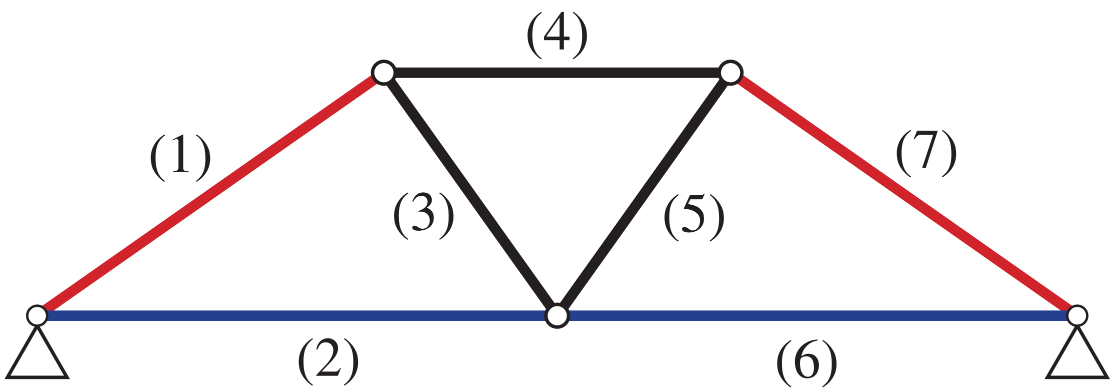
$$(\widetilde{\boldsymbol{X}}(g), \widetilde{\boldsymbol{Y}}(g), \widetilde{\boldsymbol{z}}(g)) = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{z}) \quad \forall g \in G.$$

$\boldsymbol{D} \in \Re^{n \times n}, \ \boldsymbol{P} \in \Re^{m \times m}$ 正則行列

解の対称性

$$
\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}^{-1}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{z} &= (z_1, z_2, \cdots, z_6, z_7), \\
\tilde{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{z} &= (z_7, z_6, \cdots, z_2, z_1).
\end{aligned}
$$

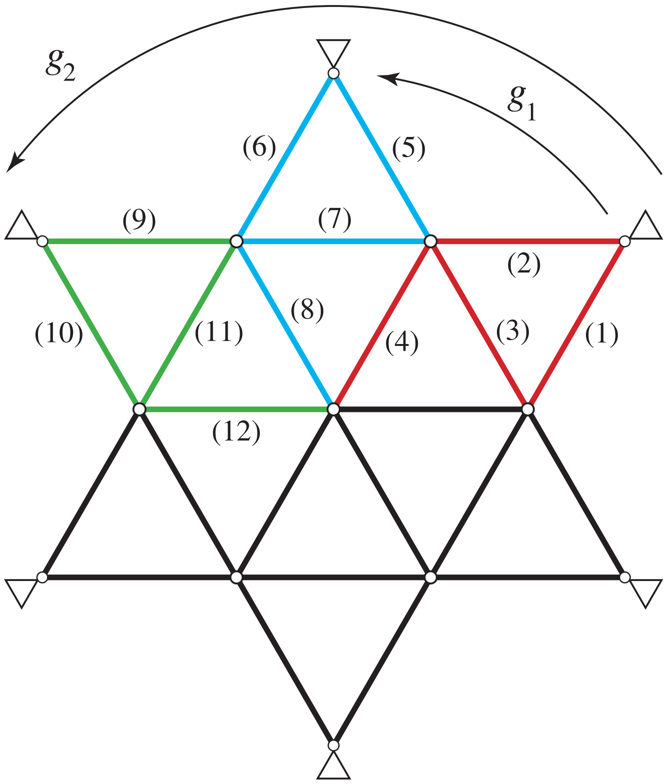


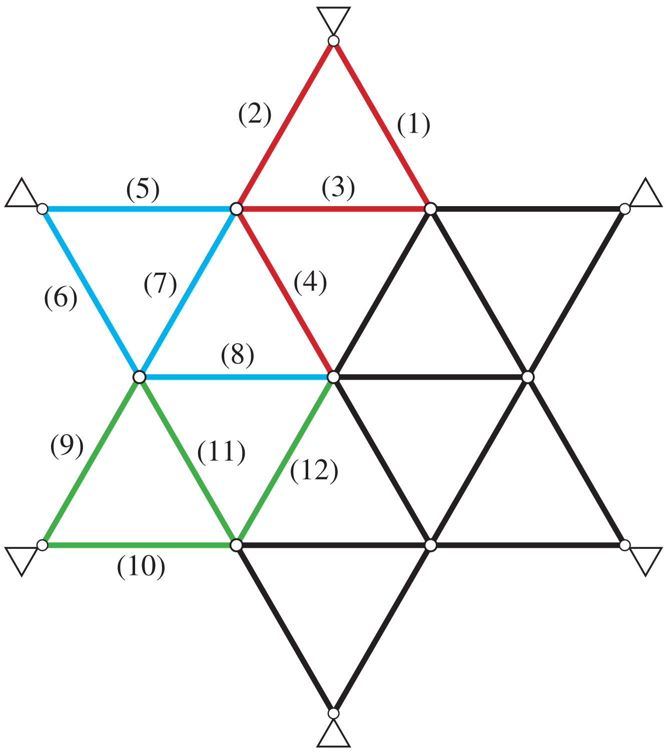
対称解:

- 最適解 $\boldsymbol{z}^*$ が $\tilde{\boldsymbol{z}}^* = \boldsymbol{z}^*$ を満たす.

解の対称性— $g_1 \in \mathrm{D}_6$: $\pi/3$ 回転

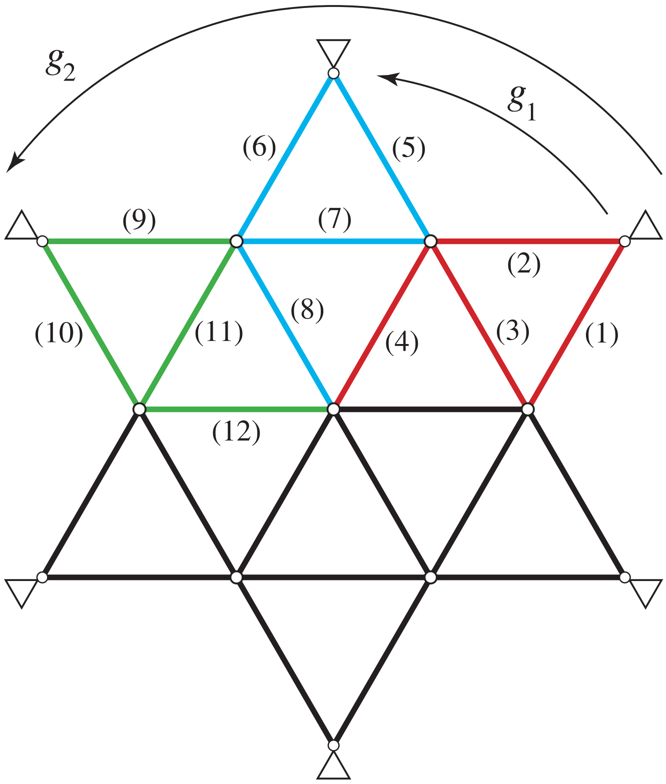
- $\widetilde{\boldsymbol{z}} = (\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \widetilde{z}_3, \widetilde{z}_4, \cdots) = (z_5, z_6, z_7, z_8, \cdots)$, $\widetilde{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{z}$.

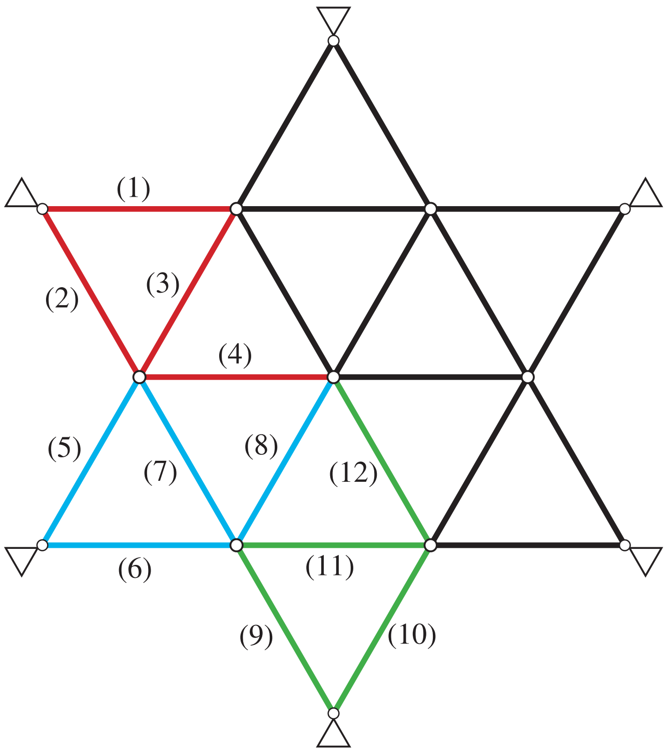




解の対称性— $g_2 \in \mathrm{D}_6$: $2\pi/3$ 回転

- $\widetilde{\boldsymbol{z}} = (\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \widetilde{z}_3, \widetilde{z}_4, \cdots) = (z_9, z_{10}, z_{11}, z_{12}, \cdots)$, $\widetilde{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{z}$.





SDP$(\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{C})$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}: \ & \text{min} \ \ \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{X} \\
& \text{s.t.} \ \ \boldsymbol{A}_p \bullet \boldsymbol{X} = b_p \ (i = 1, \cdots, m), \ \ \boldsymbol{X} \in \mathcal{S}^n_+; \\
\mathcal{D}: \ & \text{max} \ \sum_{p=1}^{m} b_p z_p \\
& \text{s.t.} \ \ \sum_{p=1}^{m} \boldsymbol{A}_p z_p + \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}, \ \ \boldsymbol{Y} \in \mathcal{S}^n_+.
\end{aligned}$$

$g \in G$ **の**SDP**の問題に対する作用**:

$$g : (\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{C}) \mapsto (\widetilde{\boldsymbol{A}}_1, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{A}}_m, \widetilde{\boldsymbol{b}}, \widetilde{\boldsymbol{C}})$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{A}}_q(g) &= \sum_{p=1}^{m} \boldsymbol{P}(g)^\top \boldsymbol{A}_p \boldsymbol{P}(g) D_{pq}(g), \\
\widetilde{b}_q(g) &= \sum_{p=1}^{m} b_p D_{pq}(g), \\
\widetilde{\boldsymbol{C}}(g) &= \boldsymbol{P}(g)^\top \boldsymbol{C} \boldsymbol{P}(g).
\end{aligned}$$

問題SDP$(\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{C})$**が**$G$**対称**:

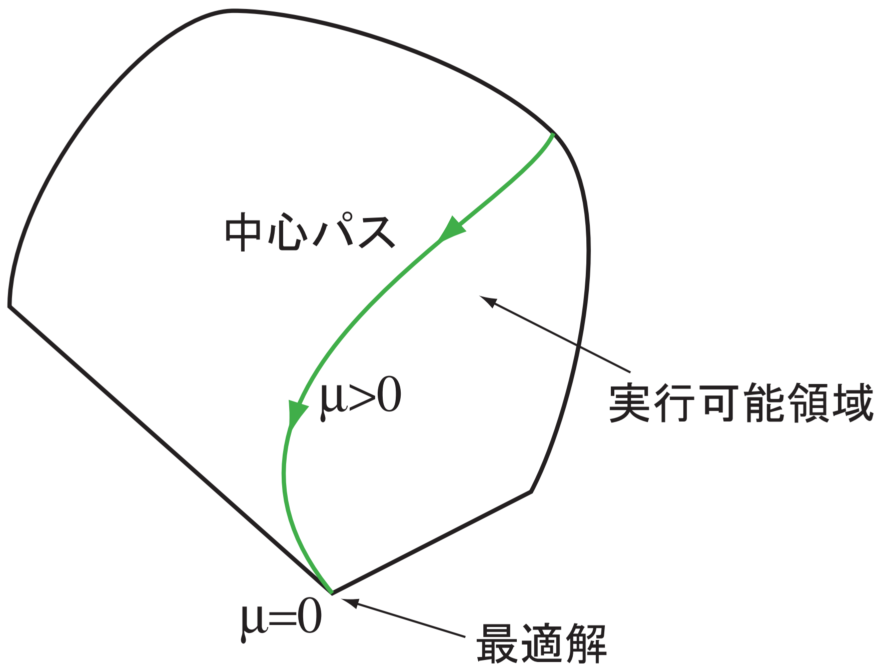
$$\begin{aligned}
&(\widetilde{\boldsymbol{A}}_1(g), \cdots, \widetilde{\boldsymbol{A}}_m(g), \widetilde{\boldsymbol{b}}(g), \widetilde{\boldsymbol{C}}(g)) \\
=&(\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{C}), \quad \forall g \in G.
\end{aligned}$$

中心パス

$$
(\mathrm{CP}_\mu) \quad \begin{aligned} & \boldsymbol{A}_p \bullet \boldsymbol{X} = b_p \quad (i = 1, \cdots, m), \\ & \sum_{p=1}^{m} \boldsymbol{A}_p z_p + \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}, \\ & \boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} = \mu \boldsymbol{I}, \quad (\mu > 0), \\ & \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathcal{S}^n_{++}. \end{aligned}
$$

$$
\Gamma = \{(\boldsymbol{X}(\mu), \boldsymbol{Y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu)) : \mu > 0\}
$$

1. $\forall \mu$, 一意的に$\exists (\boldsymbol{X}(\mu), \boldsymbol{Y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ (Kojima *et al.*, 1997).
2. $(\boldsymbol{X}(\mu), \boldsymbol{Y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu)) \to$ 最適解 $(\mu \to 0)$.
3. 内点法 : (CP_μ)を$\mu \to 0$に追跡して最適解$(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}^*, \boldsymbol{z}^*)$を得る.



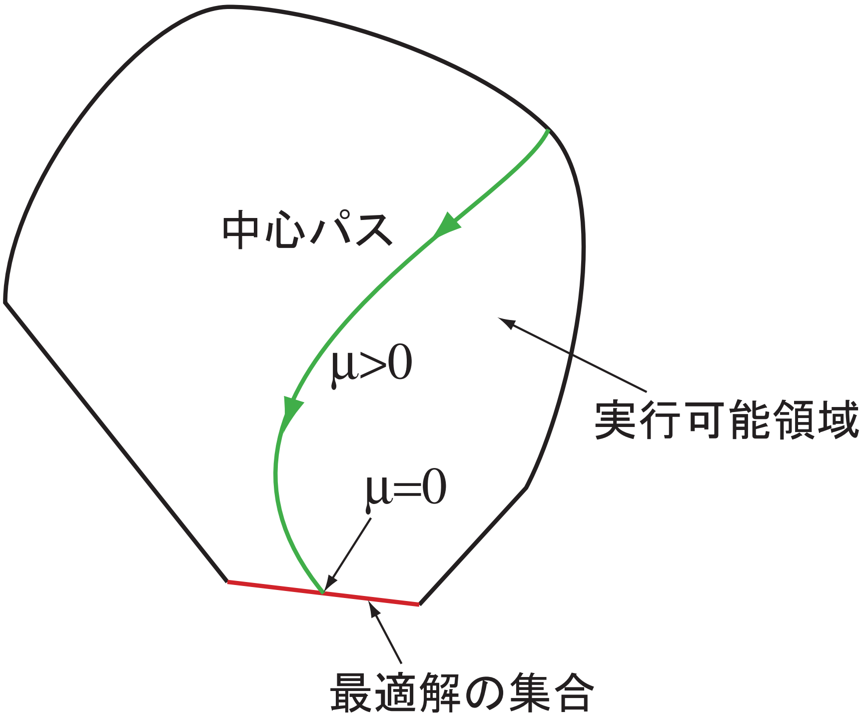
定理—中心パスの対称性:

SDP$(\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{C})$ が G 対称
$\Longrightarrow (\boldsymbol{X}(\mu), \boldsymbol{Y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu)) \in (\mathrm{CP}_\mu)$ は G 対称

証明:

1. $\mu = \mu^*$, $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{z}) \in (\mathrm{CP}_{\mu^*})$ とする.
2. $(\widetilde{\boldsymbol{X}}, \widetilde{\boldsymbol{Y}}, \widetilde{\boldsymbol{z}}) \in (\mathrm{CP}_{\mu^*})$ を示す.
3. (CP_{μ^*}) の解の一意性より, $(\widetilde{\boldsymbol{X}}, \widetilde{\boldsymbol{Y}}, \widetilde{\boldsymbol{z}}) = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{z})$.

- $\Longrightarrow$ 内点法で得られる最適解:
  $(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}^*, \boldsymbol{z}^*) = (\boldsymbol{X}(0), \boldsymbol{Y}(0), \boldsymbol{z}(0))$ は, G 対称である.



$$\begin{aligned} \mathcal{D}' : \ \text{max} \quad & -\sum_{p=1}^{m} b_p z_p \\ \text{s.t.} \quad & -\sum_{p=1}^{m} (\boldsymbol{K}_p - \bar{\Omega}\boldsymbol{M}_p) z_p + \boldsymbol{Y} = -\bar{\Omega}\boldsymbol{M}_0, \\ & \boldsymbol{Y} \in \mathcal{S}_+^n, \ z_p \geq \bar{z}_p \quad (p = 1, 2, \cdots, m). \end{aligned}$$

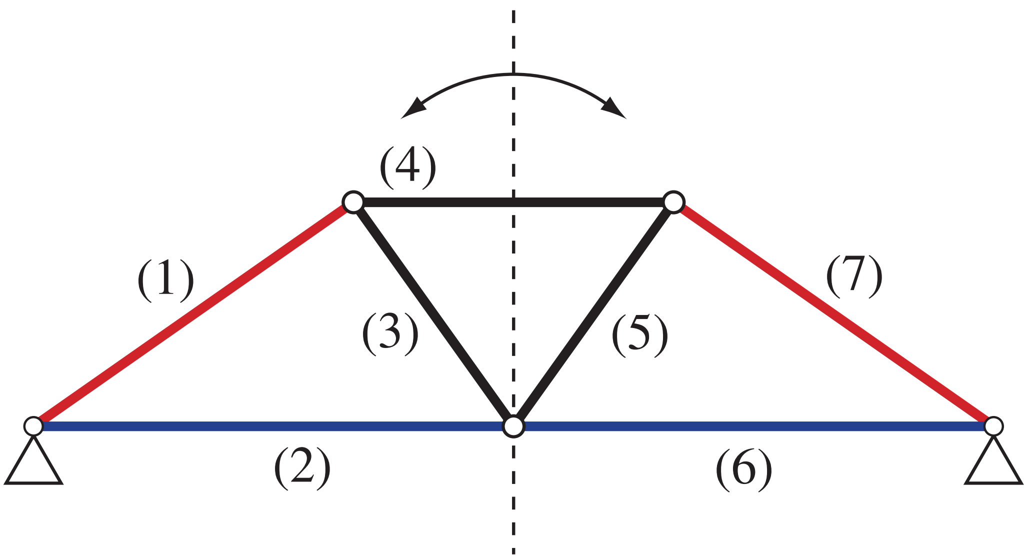
$\mathcal{D}'$ の G 対称性

— $\widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b}$, $\widetilde{\boldsymbol{K}}_p = \boldsymbol{K}_p$ を示す.

- $\boldsymbol{b}$: 部材長

$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_6, b_7),$$
$$\widetilde{\boldsymbol{b}} = (b_7, b_6, \cdots, b_2, b_1).$$

- 対称なトラス形状$\Longrightarrow \widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b}$

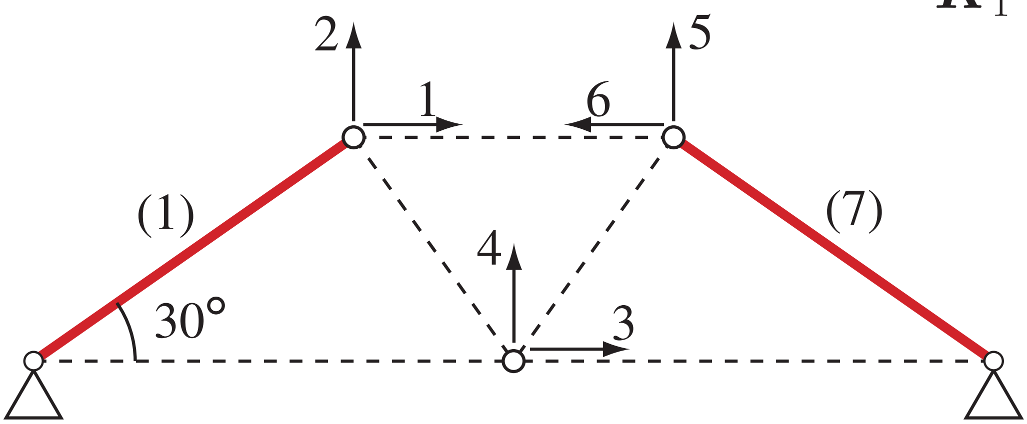


部材剛性行列 $\boldsymbol{K}_i$ の対称性:

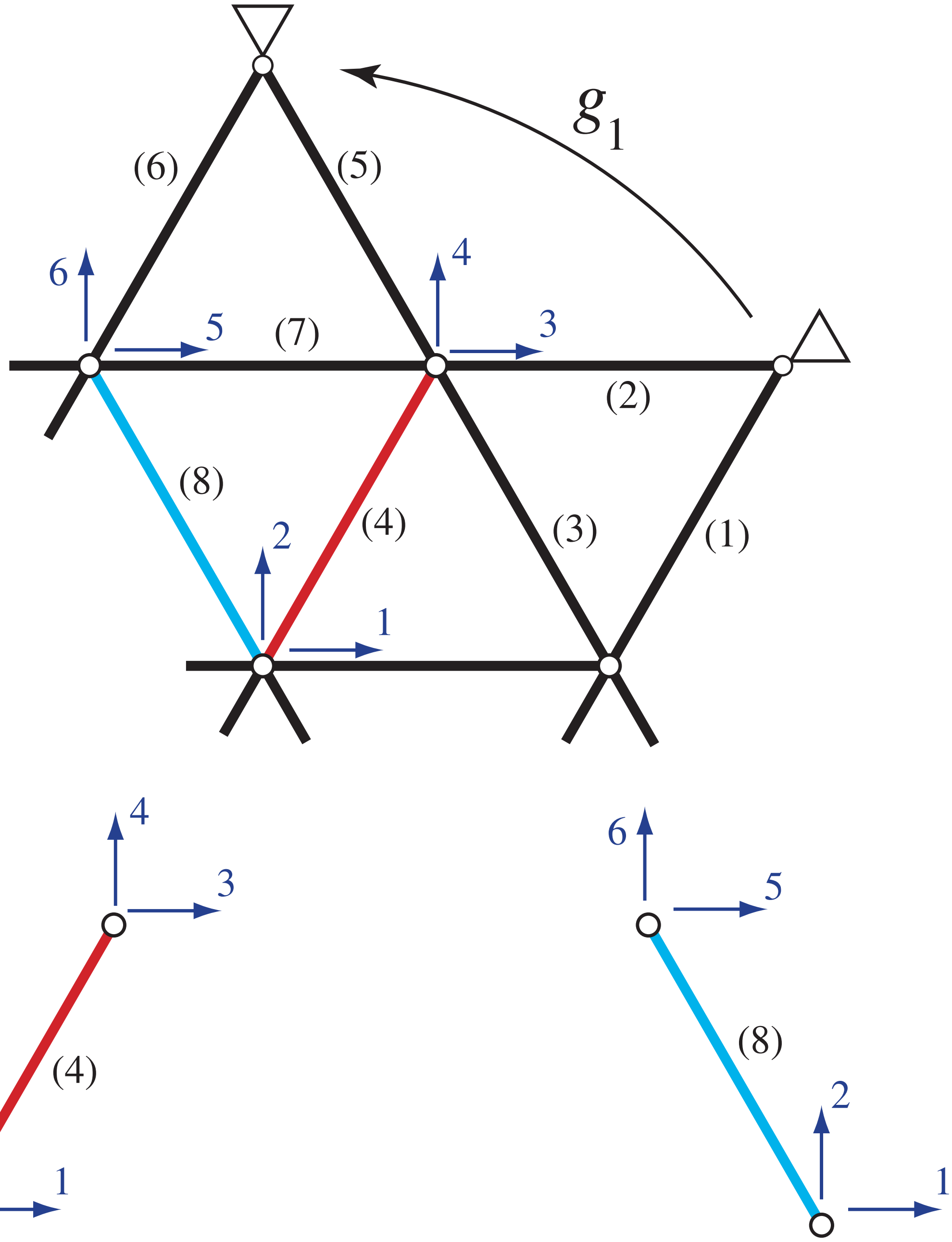
$$\boldsymbol{K}_1 = \frac{E}{b_1}\begin{bmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_7 = \frac{E}{b_7}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{\boldsymbol{K}}_1 = \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{K}_7 \boldsymbol{P}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}_1 = \boldsymbol{K}_1$$



部材剛性行列 $\boldsymbol{K}_i$ の対称性 (D_6):



- 座標変換 ($\pi/3$ 回転)
- 行および列の置換 $(3,4) \to (5,6)$
- $\Longrightarrow \widetilde{K}_4 = K_8 = K_4$

中心パスを表す非線形方程式系:

$$
(\mathrm{CP}_\mu) \quad \boldsymbol{A}_p \bullet \boldsymbol{X} = b_p \ (i = 1, 2, \cdots, m),
$$
$$
\sum_{p=1}^{m} \boldsymbol{A}_p z_p + \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C},
$$
$$
\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} = \mu \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathcal{S}^n_{++}.
$$

HRVW/KSH/M 探索方向:

$$
\boldsymbol{A}_p \bullet (\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}) = b_p \ (i = 1, 2, \cdots, m),
$$
$$
\sum_{p=1}^{m} \boldsymbol{A}_p (z_p + dz_p) + (\boldsymbol{Y} + d\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{C},
$$
$$
(d\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}')\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X} d\boldsymbol{Y} = \mu \boldsymbol{I},
$$

$d\boldsymbol{X}, d\boldsymbol{Y}$: 対称, $d\boldsymbol{X}'$: 反対称.

- $\boldsymbol{X} \in \mathcal{S}^n_{++}$, $\boldsymbol{Y} \in \mathcal{S}^n_{++}$, $\boldsymbol{z} \in \Re^m$: 現在の点
- $(d\boldsymbol{X}, d\boldsymbol{Y}, d\boldsymbol{z})$: 探索方向
- 常に, 一意的な解を持つ.

dual HRVW/KSH/M **探索方向**:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}_p \bullet (\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}) = b_p \ (i = 1, 2, \cdots, m), \\
&\sum_{p=1}^{m} \boldsymbol{A}_p (z_p + dz_p) + (\boldsymbol{Y} + d\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{C}, \\
&d\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X}(d\boldsymbol{Y} + d\boldsymbol{Y}') = \mu \boldsymbol{I}, \\
&d\boldsymbol{X}, d\boldsymbol{Y} : \text{対称}, \quad d\boldsymbol{Y}' : \text{反対称}.
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{X} \in \mathcal{S}^n_{++}$, $\boldsymbol{Y} \in \mathcal{S}^n_{++}$, $\boldsymbol{z} \in \Re^m$: 現在の点
- $(d\boldsymbol{X}, d\boldsymbol{Y}, d\boldsymbol{z})$: 探索方向

NT **探索方向**:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}_p \bullet (\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}) = b_p \ (i = 1, 2, \cdots, m), \\
&\sum_{p=1}^{m} \boldsymbol{A}_p (z_p + dz_p) + (\boldsymbol{Y} + d\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{C}, \\
&(d\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}')\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X}(d\boldsymbol{Y} + d\boldsymbol{Y}') = \mu \boldsymbol{I}, \\
&d\boldsymbol{X}, d\boldsymbol{Y} : \text{対称}, \quad d\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{U}_1, \ d\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{U}_2.
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}\boldsymbol{L}^\top$, $\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{L}^{-\top}\boldsymbol{U}\boldsymbol{L}^{-1}$, ($\boldsymbol{U}$: 反対称).
- $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^\top = \boldsymbol{X}^{1/2}(\boldsymbol{X}^{1/2}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{1/2})^{-1/2}\boldsymbol{X}^{1/2}$, ($\boldsymbol{L}$: 正則).

定理—探索方向の対称性:

1. SDP$(\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{C})$が$G$対称
2. $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{z})$が$G$対称

$\Longrightarrow$ HRVW/KSH/M探索方向$(d\boldsymbol{X}, d\boldsymbol{Y}, d\boldsymbol{z})$は$G$対称.

証明:

1. 探索方向の方程式系がG不変
2. 解の一意性

- dual HRVW/KSH/M探索方向
- NT探索方向

- 初期解がG対称
  $\Longrightarrow$全てのステップで探索方向がG対称

例題: 5自由度トラス

- 比較
  - IPM (主双対内点法)
  - SQP (逐次2次計画法)
- $E = 205.8$ GPa, $\rho = 7.86 \times 10^{-3}$ kg, $\bar{\Omega} = 1000$ rad^2/s^2, $\bar{z}_i = 10.0\ \mathrm{cm}^2$.
- 非対称な初期解 $\boldsymbol{z}^0$

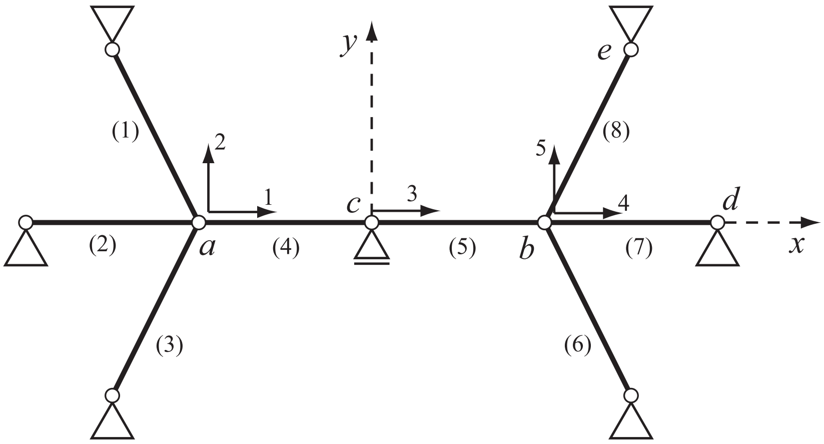


Fig. 5: 対称なトラス形状 (D_2).

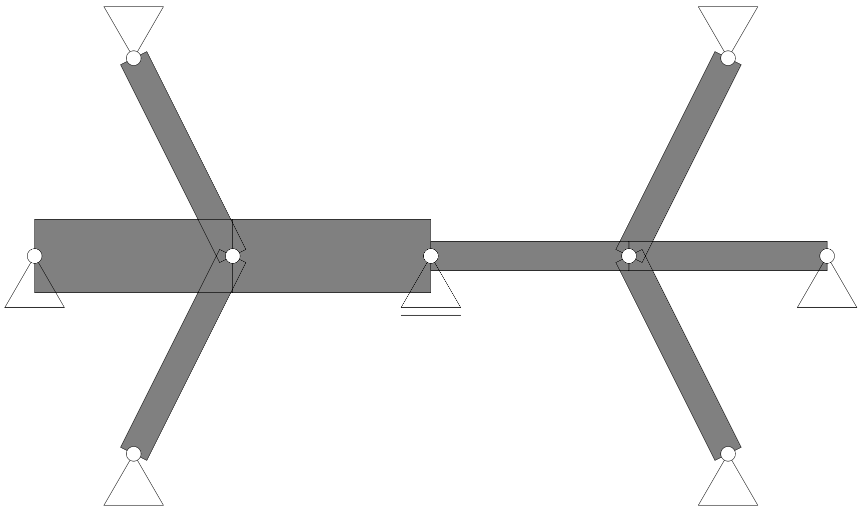


Fig. 6: 初期解.

例題: 5 自由度トラス

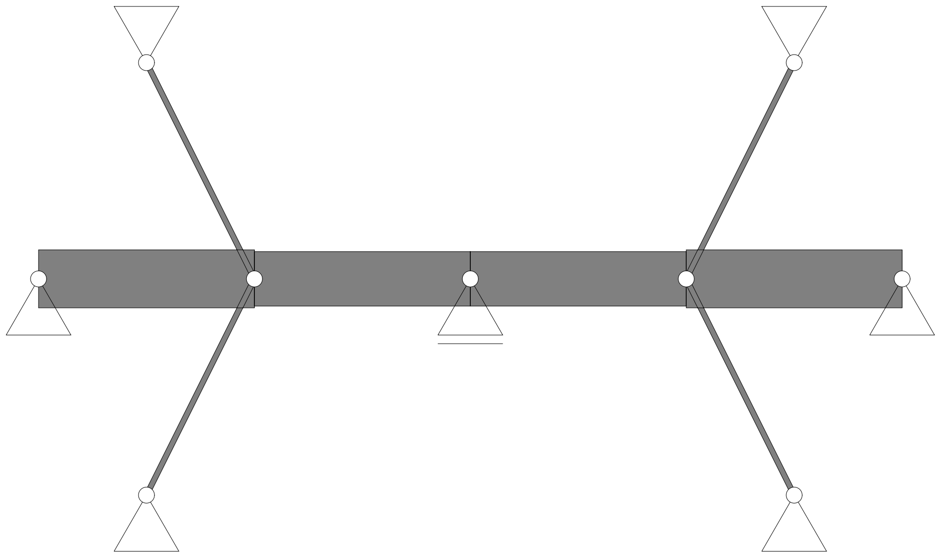


Fig. 7: IPM (対称解 (D_2)).

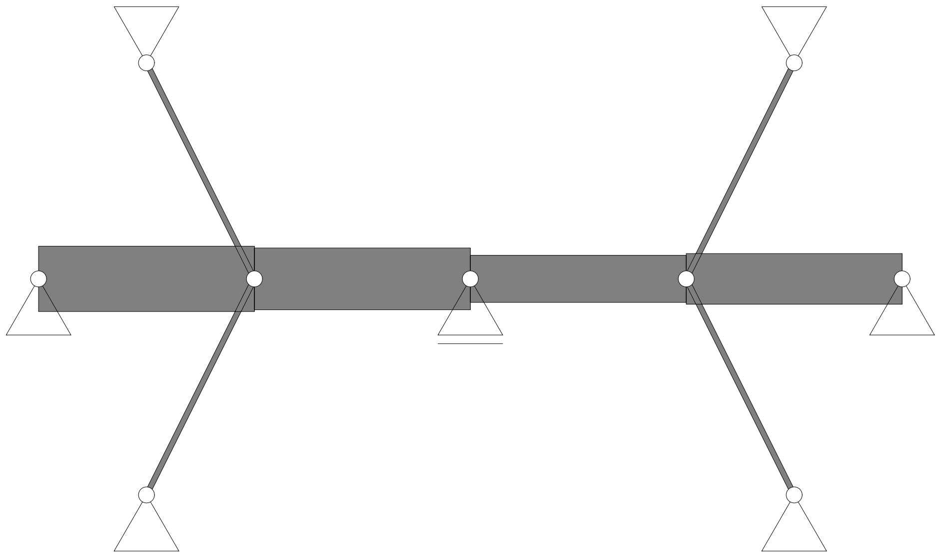


Fig. 8: SQP (非対称解).

	IPM	SQP
Vol. (cm^3)	46615.9	46615.9

例題: 5自由度トラス

探索方向の比較

初期解	HRVW/KSH/M	NT	AHO
対称	対称 (5桁)	対称 (5桁)	対称 (4桁)
非対称	対称 (4桁)	対称? (3桁)	非対称

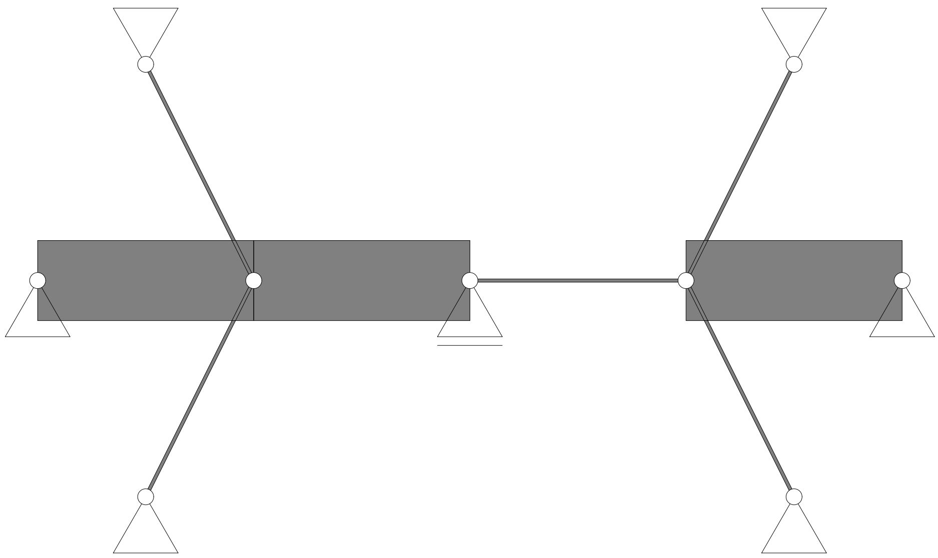


Fig. 9: 初期解 (非対称).

例題: 平面アーチ

解法	解の対称性	精度	目的関数値 (cm^3)
IPM	対称	(6 桁)	774493.1
SQP	非対称	(2 桁)	774592.9

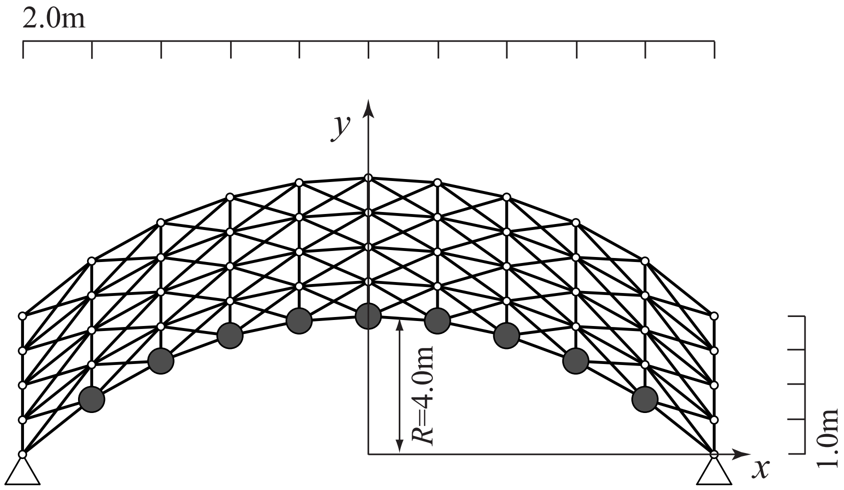


Fig. 10: 平面アーチの形状.

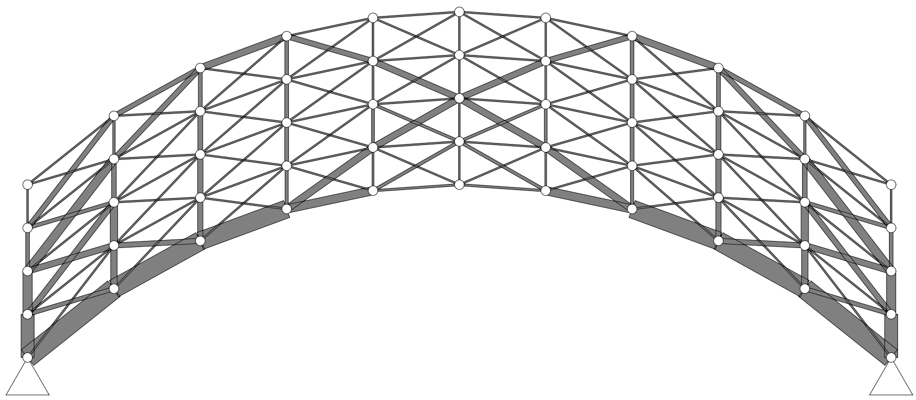


Fig. 11: 対称解 (IPM).

例題: 球形シェル状トラス

- 正2面体群 D_6
  - s : xz 平面に対する鏡映
  - $r(\phi)$: z 軸, 角度 ϕ の反時計まわりの回転

$$\mathrm{D}_6 = \left\{ r\left(\frac{2\pi k}{6}\right), sr\left(\frac{2\pi k}{6}\right) \middle| \, k = 0, \cdots, 5 \right\},$$

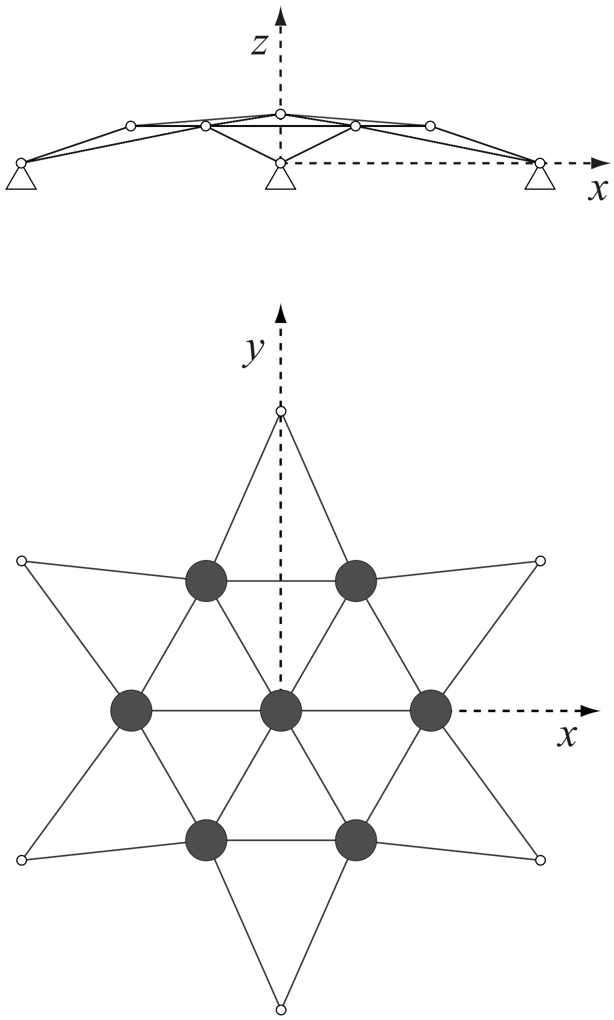


Fig. 12: 24部材球形シェル状トラス.

例題: 球形シェル状トラス

- 主双対内点法 (HRVW/KSH/M)
  - D_6 対称な断面積
  - 7桁の精度

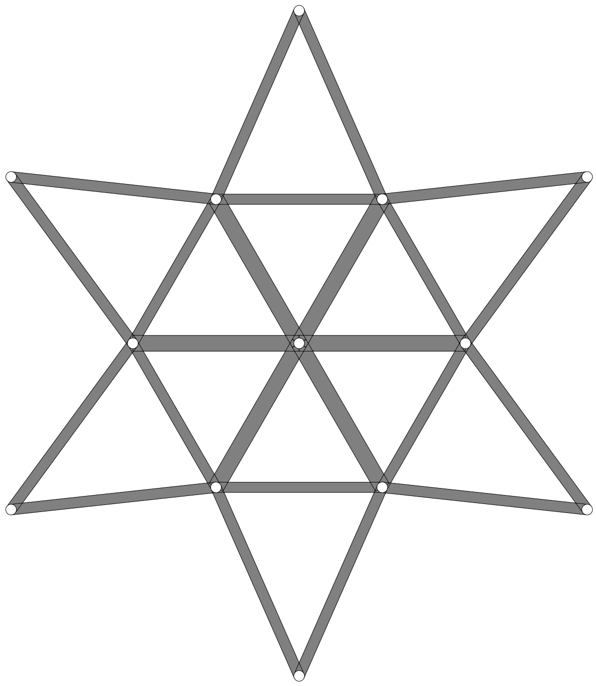


Fig. 13: 球形シェル状トラスの最適解.

例題: 30部材立体トラス

- 正4面体群 $\mathrm{T_d}$
  - 正4面体を動かしてもとの形に重ねる操作の群

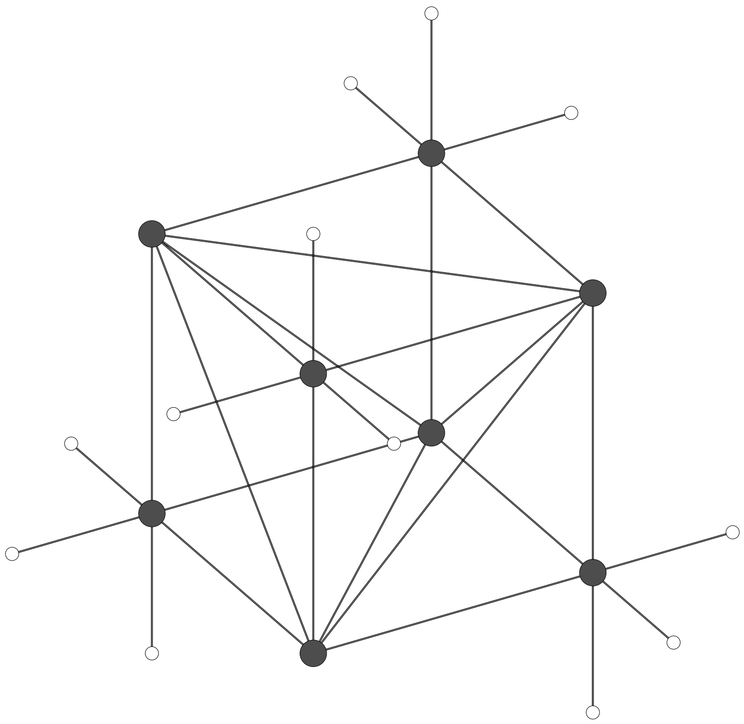


Fig. 14: 30部材立体トラス.

例題: 30部材立体トラス

- 主双対内点法 (HRVW/KSH/M)
  - $\mathrm{T_d}$ 対称な断面積
  - 9桁の精度

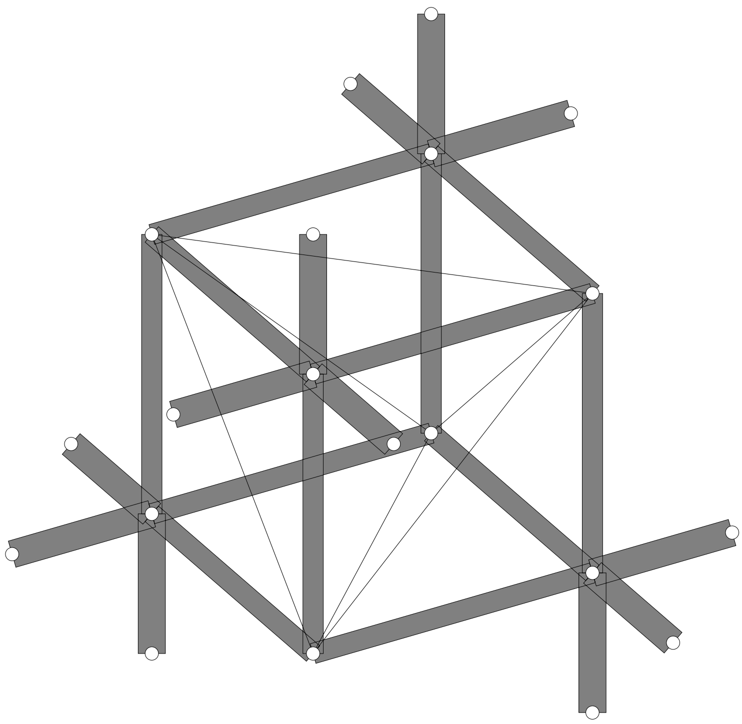


Fig. 15: 30部材立体トラスの最適解.

結論

1. 有限群 G に対し, G 対称な SDP を定義した.
2. 中心パスが G 対称であることを示した.
3. 主双対内点法の G 対称な探索方向
   (a) HRVW/KSH/M 探索方向
   (b) dual HRVW/KSH/M 探索方向
   (c) NT 探索方向
4. 応用例
   (a) 固有振動数制約下のトラスの最適設計問題
   (b) G 対称なトラス形状 $\Longrightarrow$ G 対称な SDP に帰着
   (c) G 対称な断面積が得られる
5. 数値実験
   - 主双対内点法：精度の良い対称な最適解
   - SQP：非対称な解に収束