半正定値計画法を用いた応力制約を有するトラスのロバスト性最大化

寒野 善博　竹脇 出

京都大学

半正定値計画法

- semidefinite program, SDP
- **数理計画法の 1 つ**
  - **凸, 非線形**
  - **線形計画, 凸 2 次計画などを含む**
- **主双対内点法** [Kojima *et al.* 97], [Alizadeh 98], etc.
  - **問題のサイズの多項式時間で最適解が得られる**
  - **実用的で高速なソフトウェア**

半正定値計画法

- semidefinite program, SDP
- 応用
  - トラスの固有振動数最適化 [Ohsaki *et al.* 99]
  - 組合せ最適化 [Goemans & Williamson 95]
  - サポートベクターマシン [Lanckriet *et al.* 04]
  - 非凸計画問題の緩和 [Kojima & Tunçel 00], [Lassere 02]
  - システムと制御 [Boyd *et al.* 94]
  - ロバスト線形計画問題 [Ben-Tal & Nemirovski 02]
  - 係数が不確定な線形方程式の解集合を求める問題 [Calafiore & El Ghaoui 04]

半正定値計画法

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{C} - \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_i y_i \succeq \boldsymbol{O} \end{aligned}$$

変数： $y_1, \dots, y_m$

定数： $b_1, \dots, b_m,$

$\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_m,\ \boldsymbol{C} \in \mathcal{S}^n \quad \leftarrow n \times n$ **対称行列**

- $P \succeq O \quad \Longleftrightarrow \quad P$ **が半正定値**
  $\leftarrow$ **非線形, 凸な制約**

不確定性

- 確率論的
  - 信頼性設計
- 非確率論的
  - unknown-but-bounded

不確定性

- 確率論的
  - 信頼性設計
- 非確率論的
  - unknown-but-bounded
  - convex model [Ben-Haim & Elishakoff 90]
    - トラスのロバスト最適設計 [Pantelides & Ganzerli 98]
  - ロバスト LP, QP, SDP [Ben-Tal & Nemirovski 02]
    - トラスのロバスト最適設計 [Ben-Tal & Nemirovski 97]
    - 不確定な線形方程式の解 [Calafiore & El Ghaoui 04]
  - 感度係数のノルム最小化
    - [Hang & Kwak 04], [曽我部 02]
  - ロバストネス関数 [Ben-Haim 01]
    - ロバスト性の定量的な指標

ロバストネス関数

- info-gap decision theory [Ben-Haim 01]
- 設計変数 a の関数 — $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a})$
- ロバスト性の定量的な指標の 1 つ
  - $\widehat{\alpha}$ が大きい $\Longrightarrow$ ロバスト性が大きい
  - 許容できるばらつきの '幅' を表す
- 不確定なパラメータの分布の情報が不要
- 構造物の性能制約に対する保証を与える
  - ばらつきの '幅' が $\widehat{\alpha}$ 以下 $\Longrightarrow$ 制約を必ず満たす

釣合式

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \mathbf{f}$$

不確定な外力:

$$\mathbf{f} = \widetilde{\boldsymbol{f}} + \zeta, \quad \alpha \geq \|\zeta\|$$

$\widetilde{\boldsymbol{f}}$	**公称値 (平均値)**
ζ	**不確定** (unknown-but-bounded)
$\alpha \geq 0$	**不確定性の 'ブきさ'**

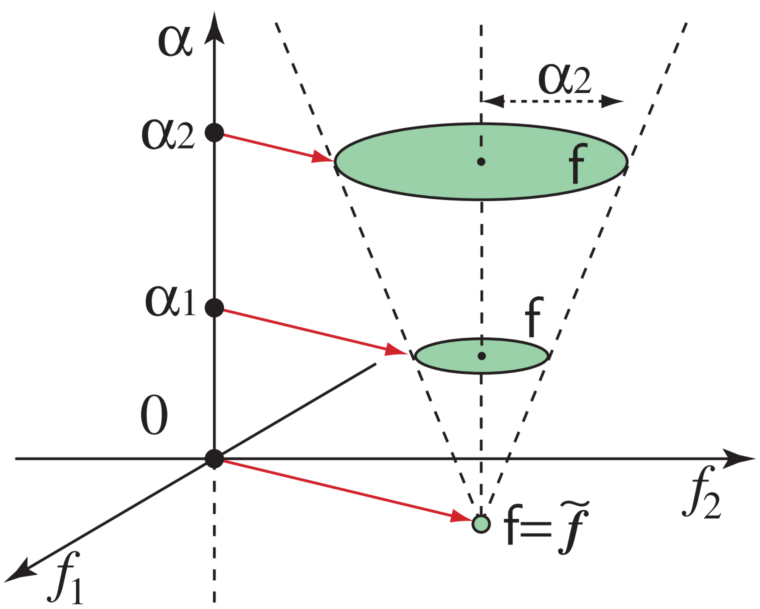
釣合式

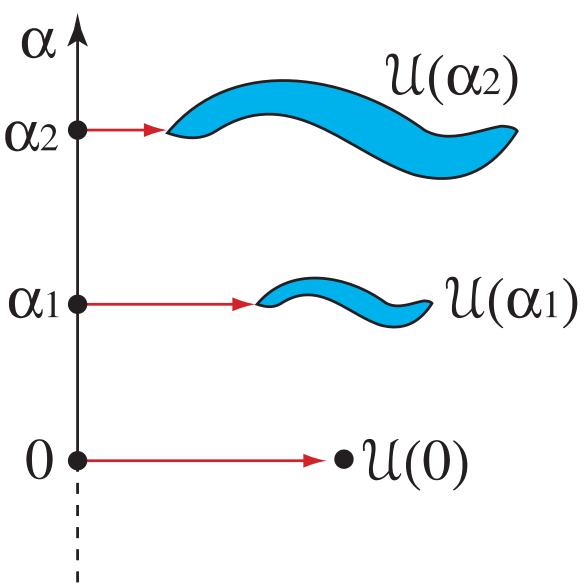
$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \mathbf{f}$$

不確定な外力:

$$\mathbf{f} = \widetilde{\boldsymbol{f}} + \zeta, \quad \alpha \geq \|\zeta\|$$

- **釣合式の解 $\boldsymbol{u}$ の集合** $\longrightarrow \mathcal{U}(\alpha)$





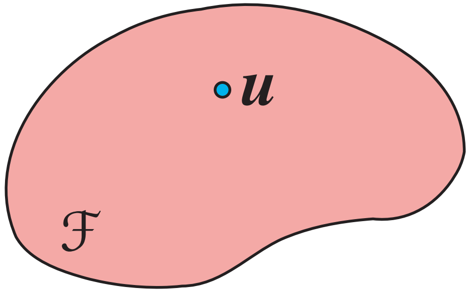
制約条件

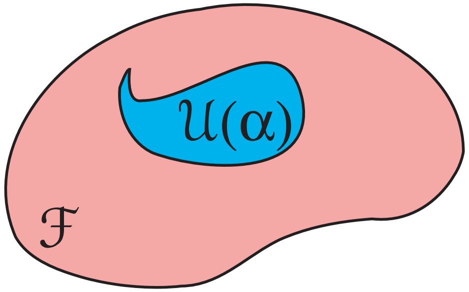
通常の制約

$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{F}, \quad \boldsymbol{u}\text{は釣合式の解}$$

ロバスト制約

$$\mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$$





$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{F},\ \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \widetilde{\boldsymbol{f}}$$

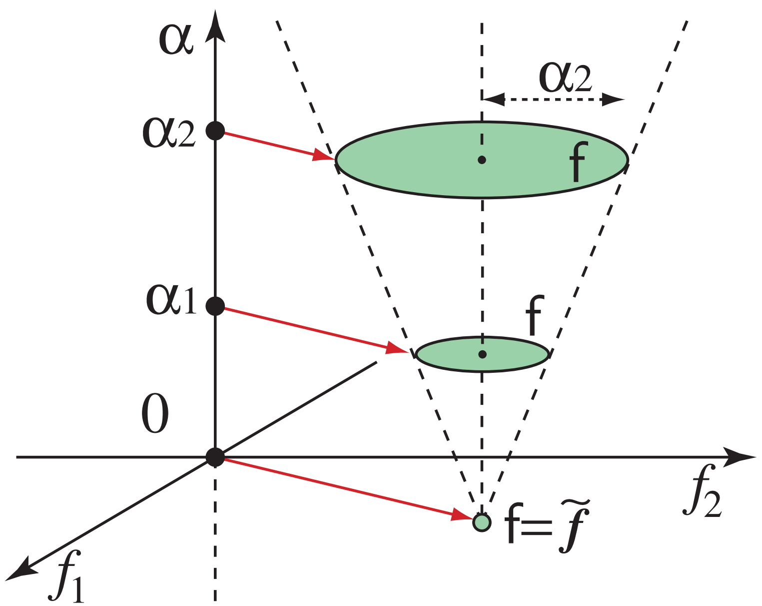
$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{F},\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}(\alpha)$$

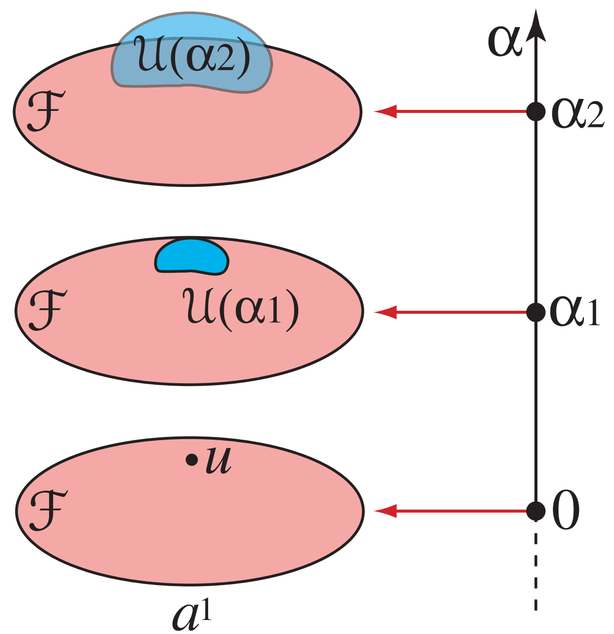
無限個の制約条件

ロバストネス関数 $\widehat{\alpha}$

ロバスト制約

$$\mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$$

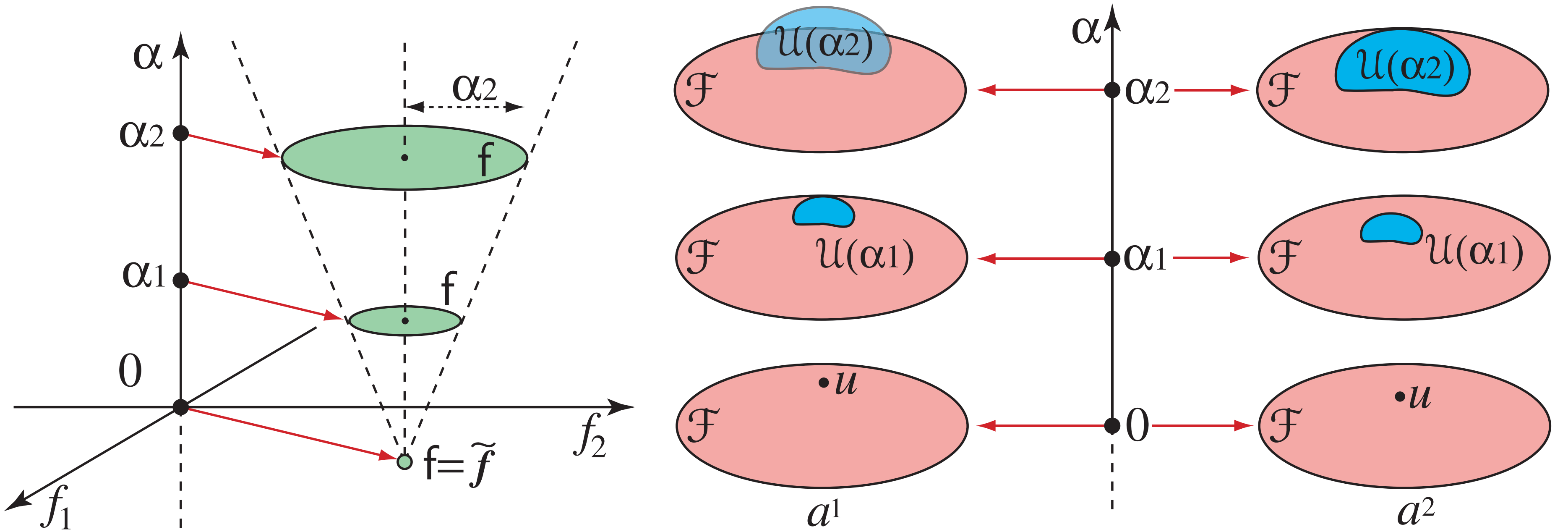




ロバストネス関数 $\widehat{\alpha}$

ロバスト制約

$$\mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$$

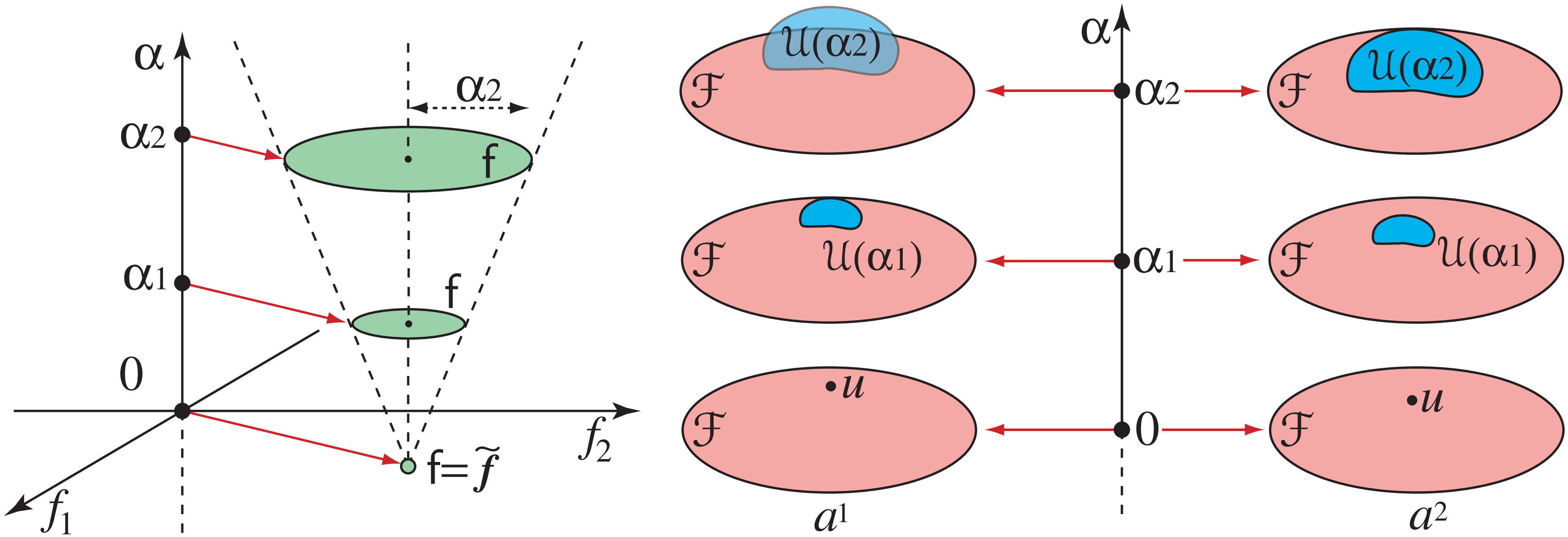


$\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^1) = \alpha_1$ $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^2) = \alpha_2$

ロバストネス関数 $\widehat{\alpha}$

ロバスト制約

$$\mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$$



$\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^1) = \alpha_1$ $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^2) = \alpha_2$

- $\widehat{\alpha} =$ 性能制約 $\mathcal{F}$ が必ず満たされる α の最大値
- $\widehat{\alpha} = \max\{\alpha | \mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}\}$

問題の設定

制約条件 — $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \{\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) \leq \boldsymbol{0}\}$$

$g_i(\boldsymbol{u}) \quad \leftarrow \quad$ $\boldsymbol{u}$ **の多項式**

釣合式の解の集合 — $\mathcal{U}(\alpha)$

$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}(\alpha)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \widetilde{\boldsymbol{f}} + \zeta, \quad \alpha \geq \|\zeta\|$$

ロバストネス関数 — $\widehat{\alpha}$

$$\widehat{\alpha} = \max\{\alpha \,|\, \mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}\}$$

Quadratic embedding

制約条件

$$\mathcal{F} = \{\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) \leq \boldsymbol{0}\}$$

$$g_i(\boldsymbol{u}) \quad \leftarrow \quad \boldsymbol{u}\ \textbf{の多項式}$$

2 次形式 ($Q_l \in \mathcal{S}^{n+1}$)

$$\mathcal{F} = \left\{ \boldsymbol{u} \,\middle|\, \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ 1 \end{pmatrix}^{\top} \boldsymbol{Q}_l \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0,\ l = 1, \dots, n^{\mathrm{c}} \right\}$$

- “(多項式) ≤ 0” は有限個の 2 次不等式で表現できる

Quadratic embedding

釣合式の解の集合

$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}(\alpha)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \widetilde{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{\zeta}, \quad \alpha \geq \|\boldsymbol{\zeta}\|$$

2 次形式 ($\Omega(\alpha) \in \mathcal{S}^{n+1}$)

$$\mathcal{U}(\alpha) = \left\{ \boldsymbol{u} \,\middle|\, \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ 1 \end{pmatrix}^{\top} \boldsymbol{\Omega}(\alpha) \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

- α を固定
  $\rightarrow$ 2 次不等式で表現できる

$\mathcal{S}$-procedure + homogenization

2 次不等式で表される領域

$$\mathcal{Q}_i = \left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix}^{\top} \boldsymbol{P}_i \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \right\}, \qquad \boldsymbol{P}_0,\ \boldsymbol{P}_1 \in \mathcal{S}^{n+1}$$

定理

$$\mathcal{Q}_1 \subseteq \mathcal{Q}_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \tau \geq 0, \qquad \boldsymbol{P}_0 - \tau \boldsymbol{P}_1 \succeq \boldsymbol{O}$$

SDPへの変換

ロバストネス関数 $\widehat{\alpha}$ を求める問題

$$\widehat{\alpha} = \max \{ \alpha \,|\, \mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F} \}$$

$$\Downarrow$$

$\mathcal{S}$-procedure

$$\Downarrow$$

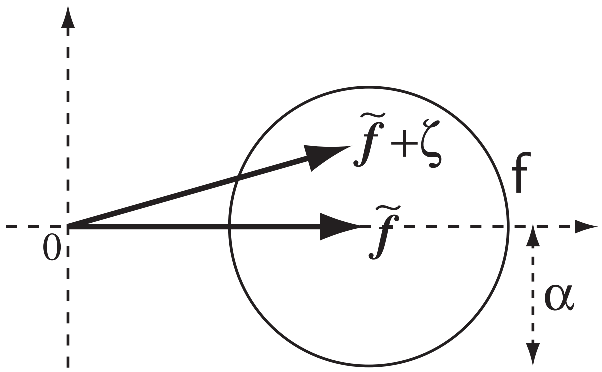
SDP 問題

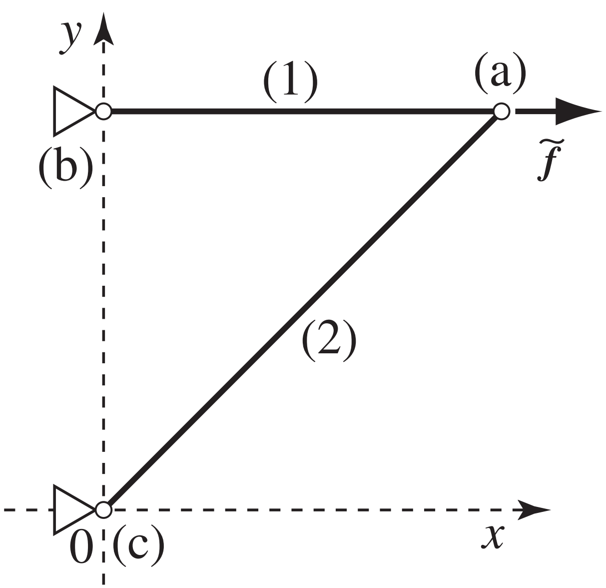
$$\boxed{\widehat{\alpha}^2 = \max \{ t \,|\, \boldsymbol{G}_l(t, \rho_l) \succeq \boldsymbol{O},\ \rho_l \geq 0,\ l = 1, \dots, n^{\mathrm{c}} \}}$$

$$\boldsymbol{G}_l = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{K}\widetilde{\boldsymbol{f}} \\ -\widetilde{\boldsymbol{f}}^\top \boldsymbol{K} & -t + \widetilde{\boldsymbol{f}}^\top \widetilde{\boldsymbol{f}} \end{pmatrix} + \rho_l \boldsymbol{Q}_l$$

例題(2部材トラス)

- 外力：中心が $\widetilde{f}$, 幅 α で変動する
- 応力制約

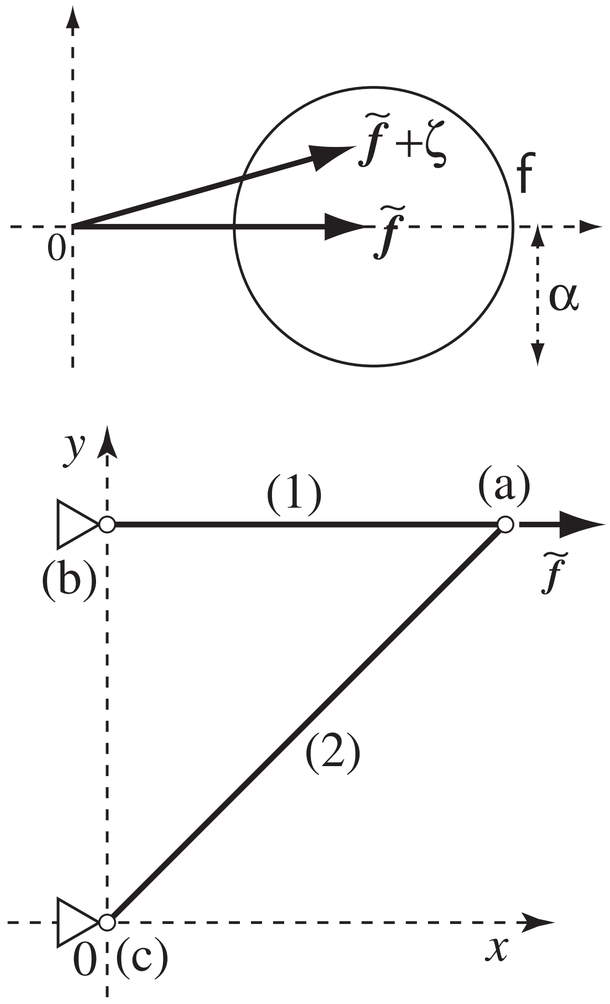




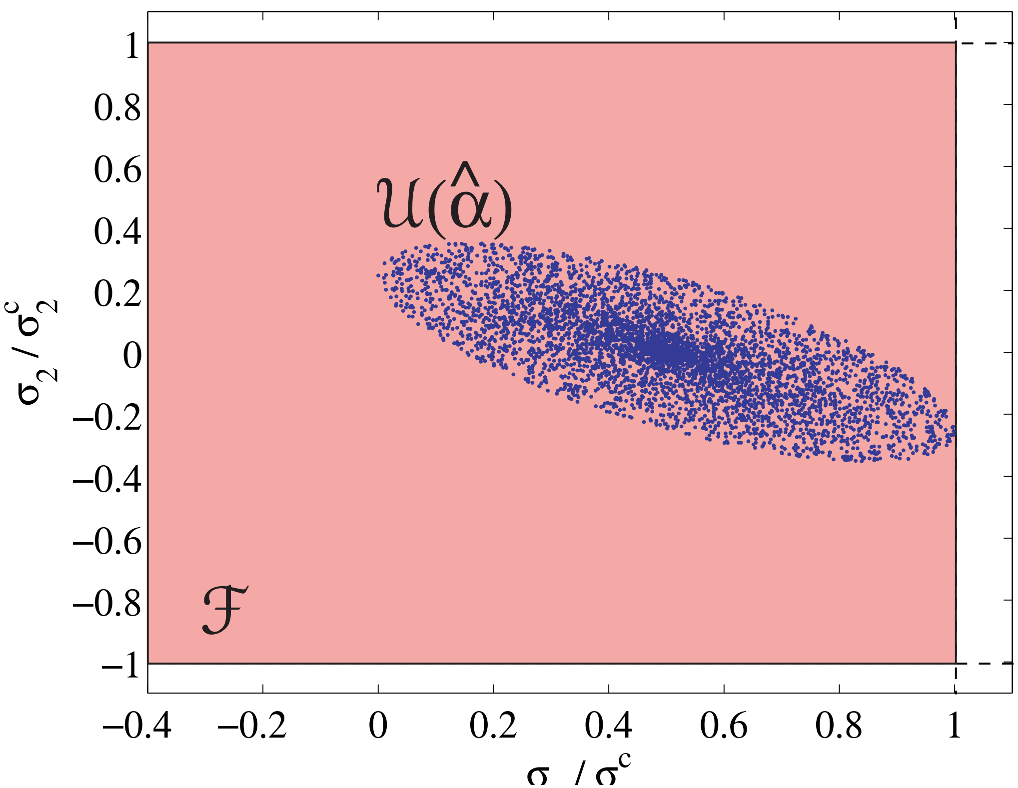
$$\widehat{\alpha} = 69.297 \text{ kN}$$

例題(2部材トラス)

- 外力：中心が $\tilde{f}$, 幅 α で変動する
- 応力制約



$\widehat{\alpha} = 69.297$ kN



応力分布

ロバストネス関数最大化問題

- $\widehat{\alpha}$ は断面積 a の関数

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{a}} \quad & \widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0}, \quad \sum_{i=1}^{n^{\mathrm{m}}} \ell_i a_i \leq \overline{V}. \end{aligned}$$

ロバストネス関数最大化問題

- $\widehat{\alpha}$ は断面積 a の関数

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{a}} \quad & \widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}) \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0}, \quad \sum_{i=1}^{n^{\mathrm{m}}} \ell_i a_i \leq \overline{V}.
\end{aligned}
$$

非線形 SDP 問題

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{a}, t, \boldsymbol{\rho}} \quad & t \\
\text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a}) & -\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})\widetilde{\boldsymbol{f}} \\ -\widetilde{\boldsymbol{f}}^{\top}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a}) & -t + \widetilde{\boldsymbol{f}}^{\top}\widetilde{\boldsymbol{f}} \end{pmatrix} + \rho_l \boldsymbol{Q}_l \succeq \boldsymbol{O}, \\
& \boldsymbol{\rho} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0}, \quad \sum_{i=1}^{n^{\mathrm{m}}} \ell_i a_i \leq \overline{V}.
\end{aligned}
\qquad \text{(NSDP)}
$$

逐次SDP法

NSDP

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\max_{\boldsymbol{x}} & x_1 \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) \succeq \boldsymbol{O}. \end{array}$$

- G : 非線形 $(\in \mathcal{S}^n)$

x^k における SDP 近似モデル

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\max_{\Delta\boldsymbol{x}} & \Delta x_1 - \frac{1}{2} c^k \|\Delta\boldsymbol{x}\|^2 \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^k) + D\boldsymbol{G}^k \cdot \Delta\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{O}. \end{array} \qquad (\clubsuit)$$

逐次SDP法

Step 0: 初期解 $\boldsymbol{a}^0$ を選び, $k := 0$ とする.

Step 1: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^k$ を固定して NSDP の最適解 $(t^k, \boldsymbol{\rho}^k)$ を求める.

Step 2: $(t^k, \boldsymbol{\rho}^k, \boldsymbol{a}^k)$ において SDP モデル (♣) の最適解
$(\Delta t^k, \Delta\boldsymbol{\rho}^k, \Delta\boldsymbol{a}^k)$ を求める.
$\|(\Delta t^k, \Delta\boldsymbol{\rho}^k, \Delta\boldsymbol{a}^k)\| \leq \epsilon$ ならば，反復終了.

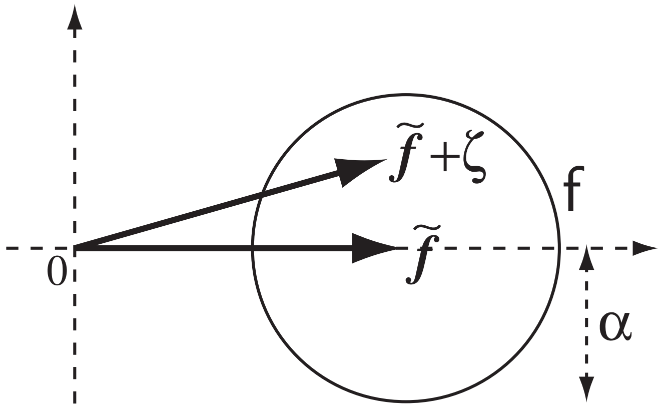
Step 3: $\boldsymbol{a}^{k+1} := \boldsymbol{a}^k + \Delta\boldsymbol{a}^k$ とおく.

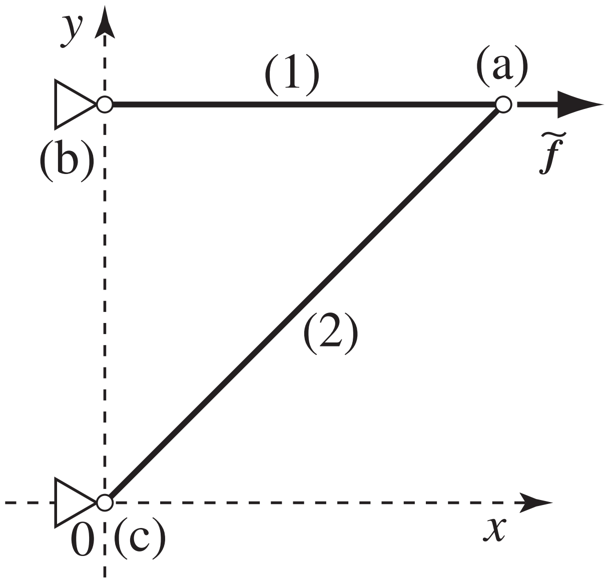
Step 4: $c^{k+1} > 0$ を選び，$k \leftarrow k + 1$ として Step 1 へ.

- 大域的収束性
- 主双対内点法
  - SDP の大域解が得られる

2部材トラス

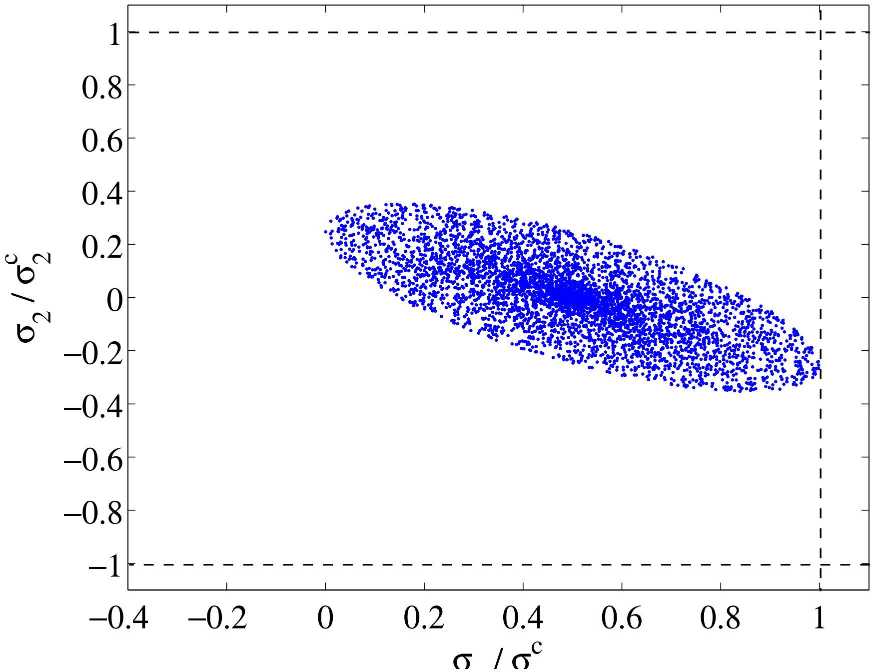
- 主双対内点法
  - SeDuMi 1.05 / Matlab 6.5.1
- 外力：中心が $\tilde{f}$, 幅 α で変動する
- 応力制約



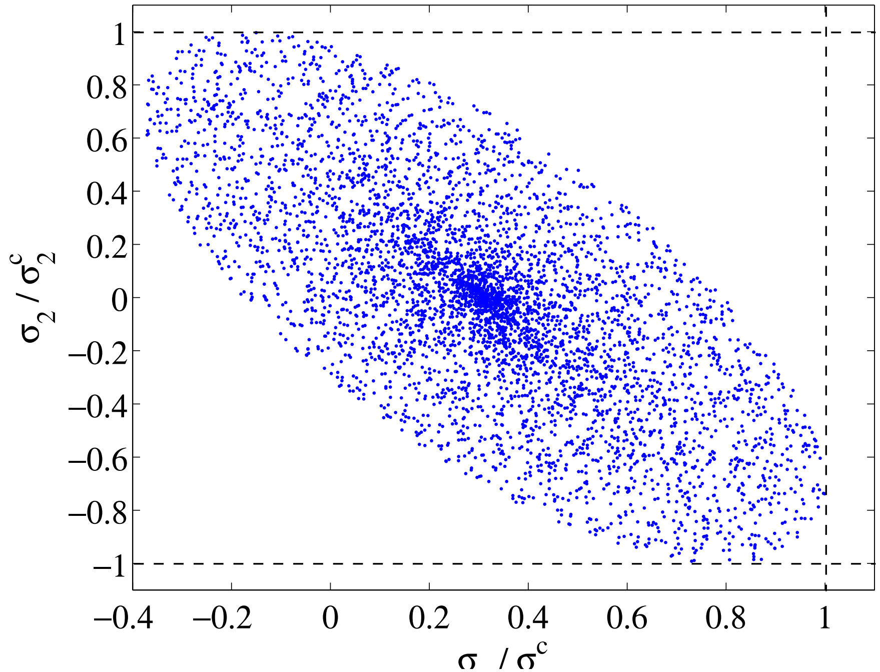


2部材トラス

- ランダムに生成した外力に対する応力
- 最適解
  $\longrightarrow$ 双方の部材の応力制約がアクティヴになり得る

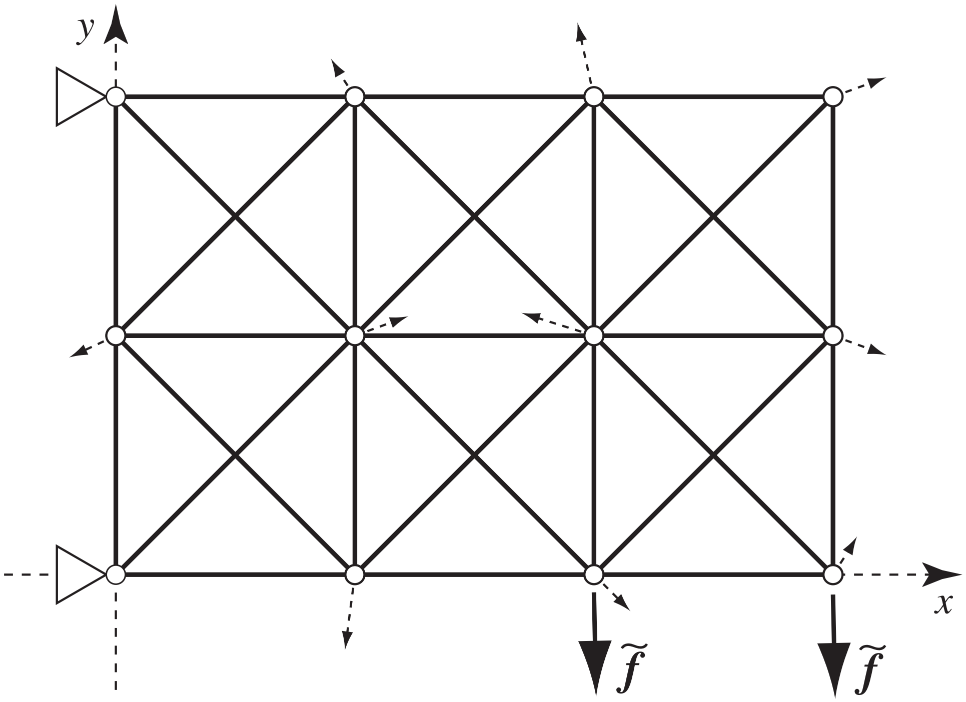


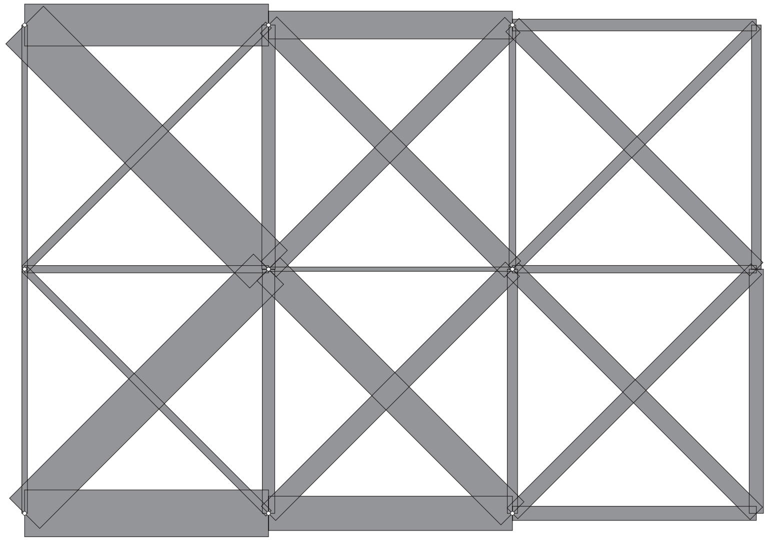
$$\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^0) = 69.3\ \mathrm{kN}$$



$$\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^*) = 153.8\ \mathrm{kN}$$

29 部材トラス

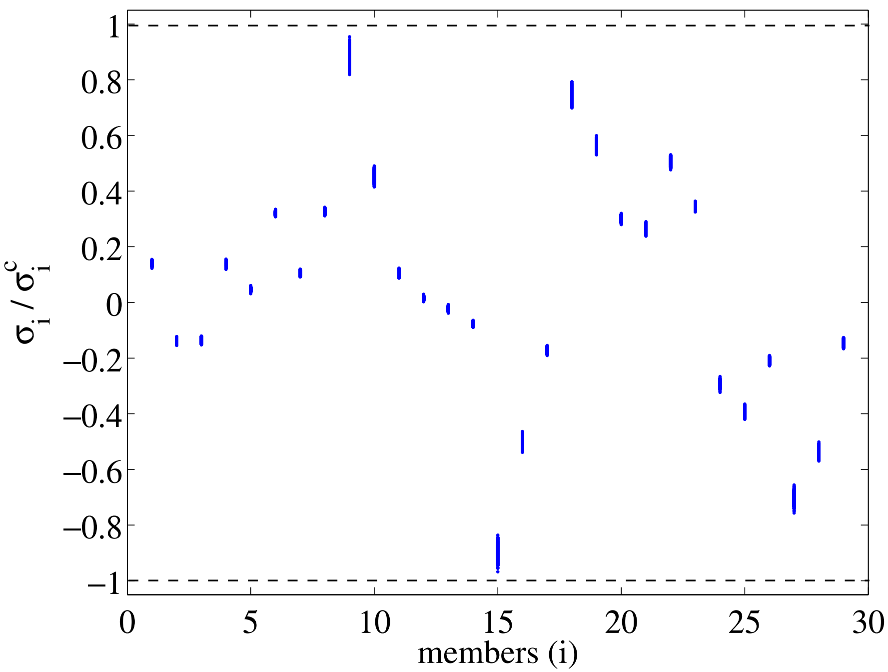


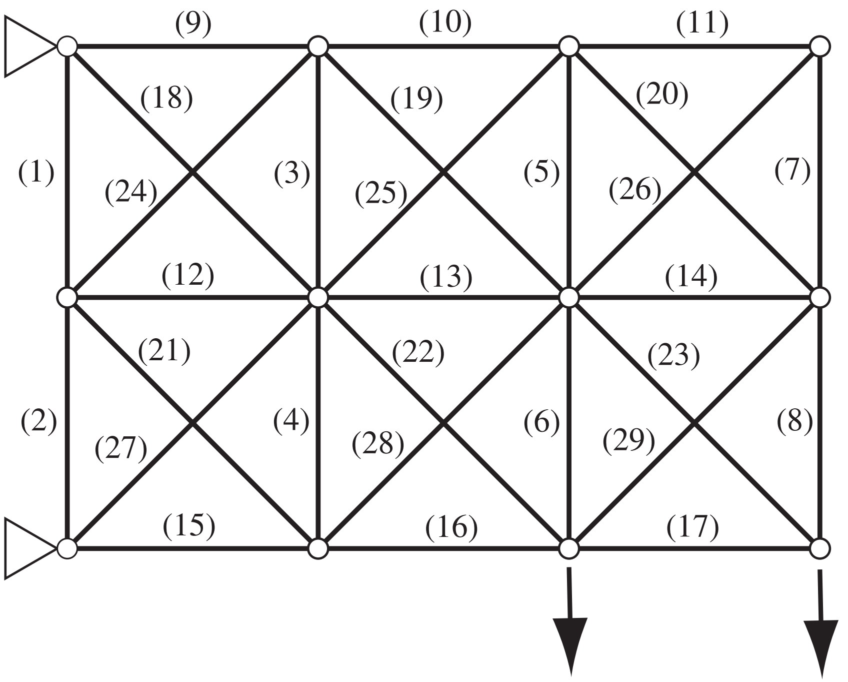


最適解 a^*

- すべての節点に不確定な外力が作用
- 応力制約 $|\sigma_i| \leq \sigma_i^{\mathrm{c}}$

29部材トラス

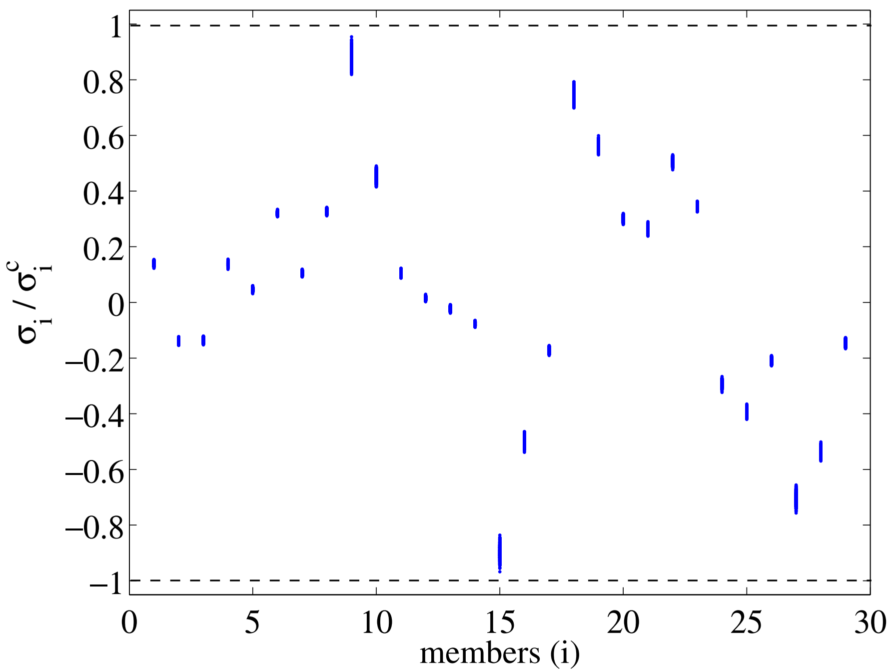




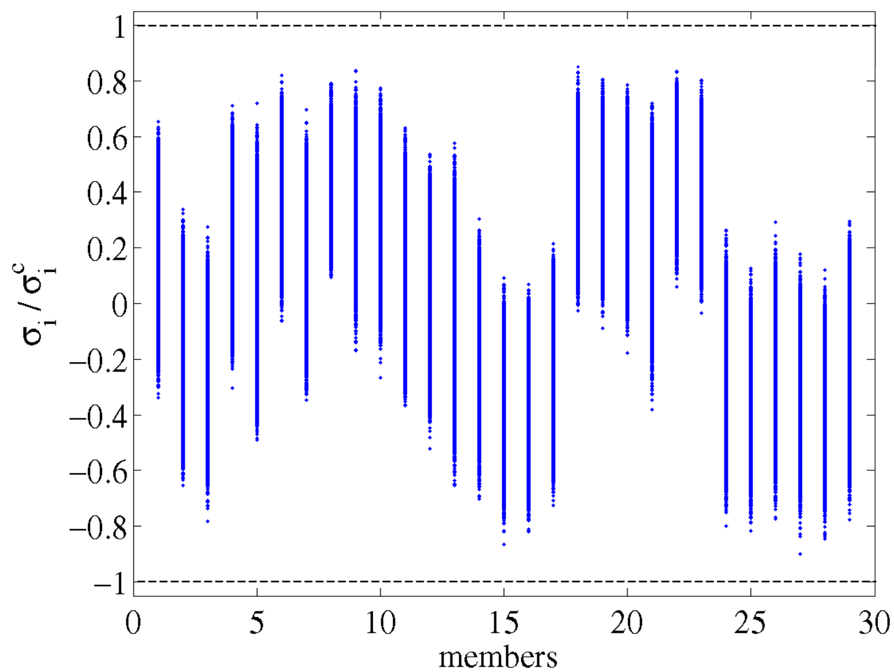
初期解 a^0

- すべての節点に不確定な外力が作用
- $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^0) = 0.72 \text{ kN}$
- $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^*) = 10.85 \text{ kN}$

29 部材トラス



初期解 a^0



最適解 a^*

- すべての節点に不確定な外力が作用
- $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^0) = 0.72\ \mathrm{kN}$
- $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{a}^*) = 10.85\ \mathrm{kN}$

結論

- ロバストネス関数
  - ロバスト性の定量的な指標
  - 不確定な外力の作用するトラス
  - 無限個の制約条件
  - 2 次不等式への埋め込み + $\mathcal{S}$-procedure
  - SDP 問題へ帰着
- ロバストネス関数最大化問題
  - 非線形 SDP
  - 逐次 SDP 法
  - 主双対内点法を用いて SDP を繰り返し解く