

摩擦のない接触問題に対する
ウォーム・スタートを考慮した平滑化法

寒野 善博[†] 大崎 純[‡]

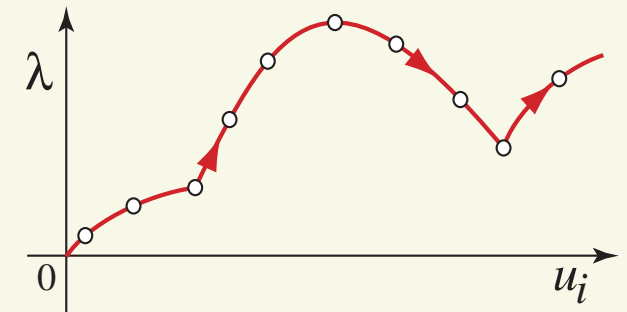
[†] 東京大学大学院 (数理情報学専攻)

[‡] 広島大学大学院 (建築学専攻)

December 9, 2010

動機：接触問題の釣合経路解析

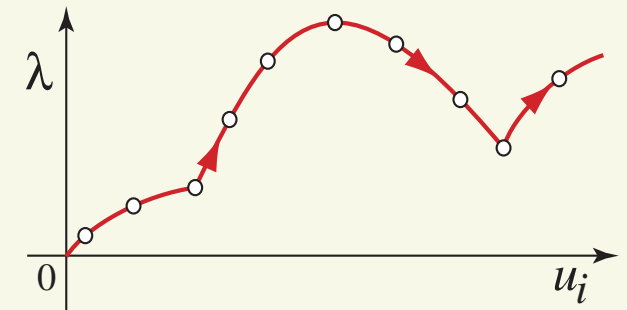
- λ ：荷重パラメータ
 u_i ：変位 (の1成分)
- 比例荷重： $\lambda \bar{f}$ (\bar{f} は定ベクトル)
- 小さな荷重ステップ毎に釣合解を求める
 - 幾何学的非線形



荷重-変位曲線

動機：接触問題の釣合経路解析

- λ ：荷重パラメータ
 u_i ：変位 (の1成分)
- 比例載荷： $\lambda \bar{f}$ (\bar{f} は定ベクトル)
- 小さな荷重ステップ毎に
釣合解を求める



荷重-変位曲線

- 幾何学的非線形

- 前後のステップで解くべき問題は、互いに似ている
→ 前ステップの解を、現ステップの**良い初期解**として使いたい
= **ウォーム・スタート**手法を提案
(\leftrightarrow **コールド・スタート**)

- 接触のない場合には (通常のアーク長法) :

$$\begin{aligned}\nabla\pi(\mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u}) &= (\lambda^k + \Delta\lambda)\bar{\mathbf{f}} \\ \|(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda)\| &= \bar{\theta}\end{aligned}$$

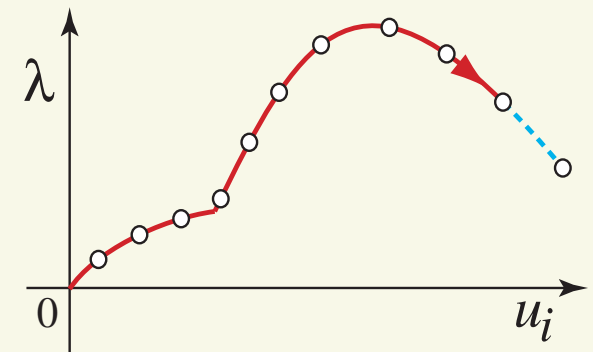
- 非線形方程式 を Newton-Raphson 法などで解く
- 前ステップの解は, 現ステップの初期解として, 自然に利用できる

動機：接触問題のウォーム・スタート

- 接触のない場合には (通常のアーク長法) :

$$\begin{aligned}\nabla\pi(\mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u}) &= (\lambda^k + \Delta\lambda)\bar{\mathbf{f}} \\ \|(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda)\| &= \bar{\theta}\end{aligned}$$

- 非線形方程式 を Newton-Raphson 法などで解く
 - 前ステップの解は, 現ステップの初期解として, 自然に利用できる
-
- 接触問題の場合には :
 - 各ステップで 相補性問題 を解く
→ ウォーム・スタートを考える



$$f(x, y) = 0,$$

$$x \geq 0, \quad h(x, y) \geq 0, \quad x^T h(x, y) = 0.$$



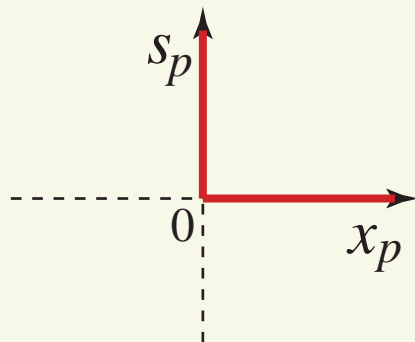
相補性問題

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^\top \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \end{aligned} \quad (\clubsuit)$$

- (\clubsuit) は 以下と等価 :

$x_p \geq 0$	$(\forall p)$	(非負条件)
$s_p = h_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$	$(\forall p)$	(非負条件)
$x_p s_p = 0$	$(\forall p)$	(相補性条件)

- KKT 条件の一般化 \rightarrow (ある意味で) 非線形計画法を含む問題

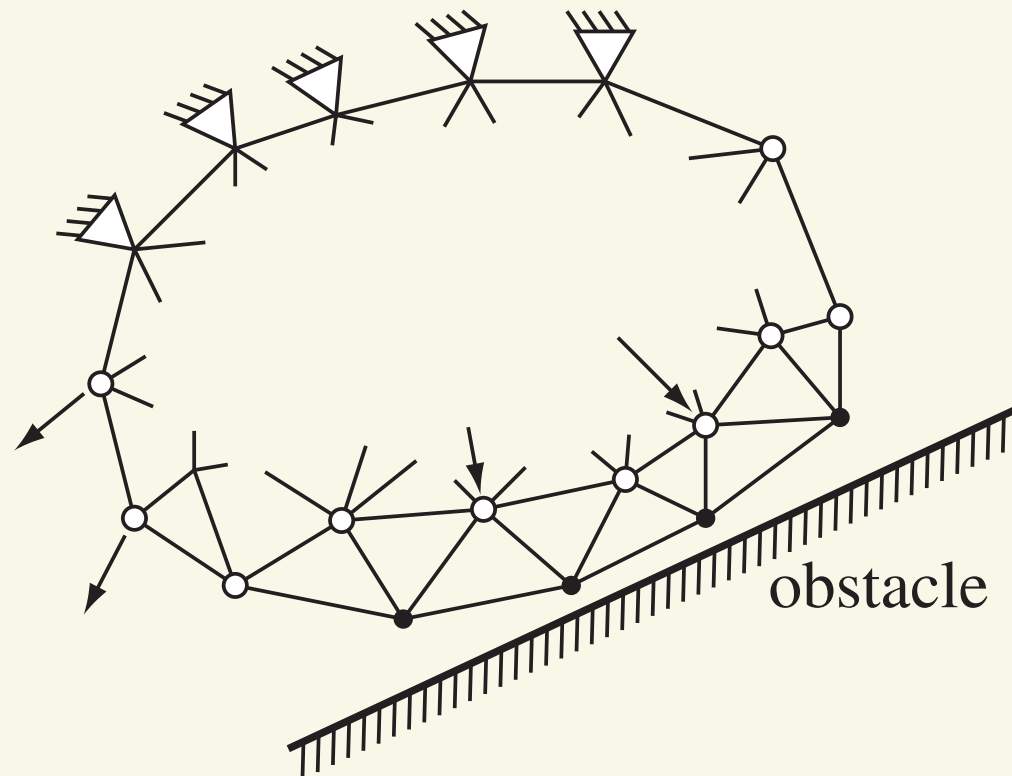


相補性問題

KKT条件
(\cong 非線形計画法)

摩擦のない接触問題

- “●” : 接触候補の節点 ($\in \mathcal{P}_c$)
- “○” : 変位指定の節点 ($\in \mathcal{P}_D$)
- “△” : 外力指定の節点 ($\in \mathcal{P}_N$)



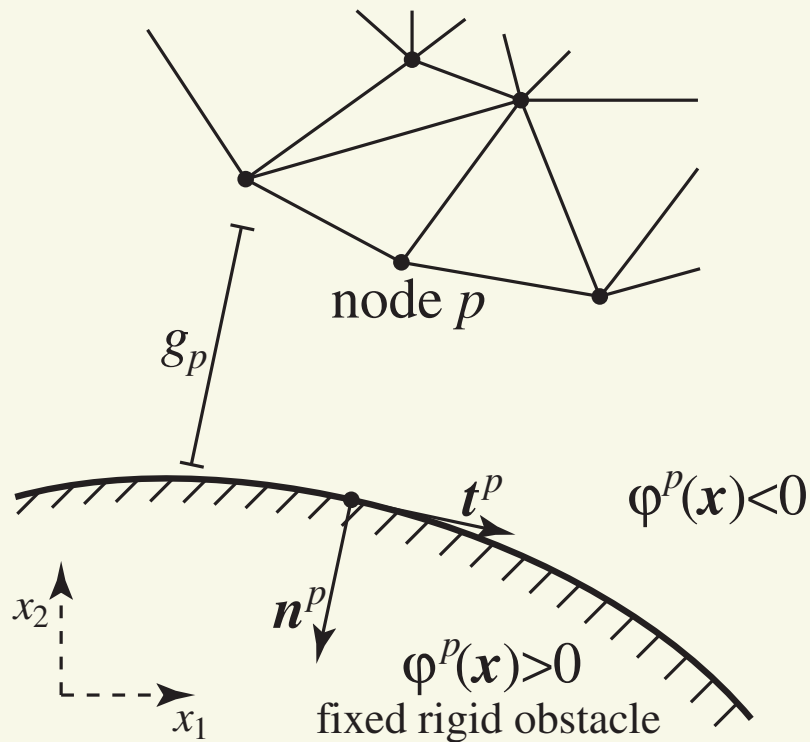
摩擦のない接触問題

- 片側接触条件：接触候補の節点 p ($p \in \mathcal{P}_c$) に対して

$$g_p \geq 0 \quad \text{[非貫入]}$$

$$r_p \leq 0 \quad \text{[非固着]}$$

$$g_p r_p = 0 \quad \text{[相補性条件]}$$



- ギャップ g_p
- 反力ベクトル $r_p \mathbf{n}_p$

摩擦のない接触問題

- 片側接触条件：接触候補の節点 p ($p \in \mathcal{P}_c$) に対して

$g_p \geq 0$	[非貫入]
$r_p \leq 0$	[非固着]
$g_p r_p = 0$	[相補性条件]

$g_p > 0$	\Rightarrow	$r_p = 0$: free
$r_p < 0$	\Rightarrow	$g_p = 0$: contact
$g_p = r_p = 0$: grazing contact

Contact kinematics

- 節点 $p \in \mathcal{P}_c$ が接触する (可能性のある) 剛体表面は既知と仮定 :

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \varphi^p(\mathbf{x}) = 0\} \quad (\varphi^p \in C^2)$$

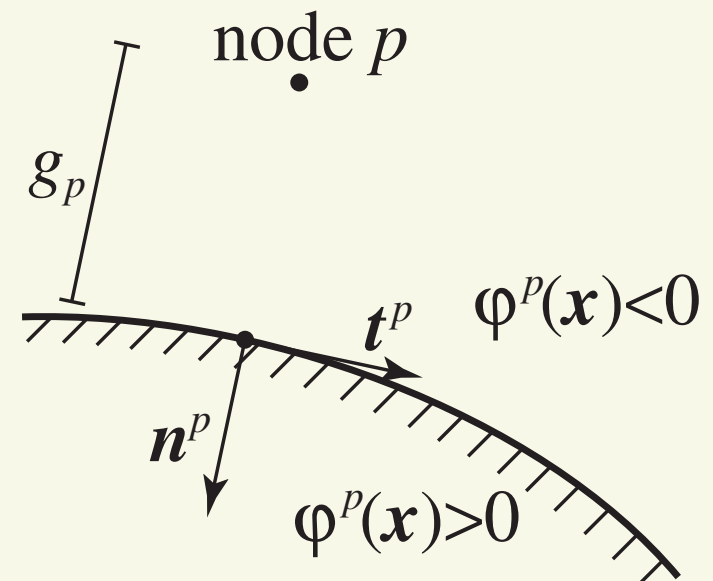
- 単位法線ベクトル

$$\mathbf{n}^p(\mathbf{x}) = \frac{\nabla \varphi^p(\mathbf{x})}{\|\nabla \varphi^p(\mathbf{x})\|}$$

- 変位 $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^d$ の許容領域は

$$\{\mathbf{u} \mid \varphi^p(\mathbf{x}^p(\mathbf{u})) \leq 0 \ (\forall p \in \mathcal{P}_c)\}$$

($\mathbf{x}^p(\mathbf{u}) \in \mathbf{R}^3$: 位置ベクトル)



Contact kinematics

- 節点 $p \in \mathcal{P}_c$ が接触する (可能性のある) 剛体表面は既知と仮定 :

$$\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \varphi^p(\mathbf{x}) = 0 \} \quad (\varphi^p \in C^2)$$

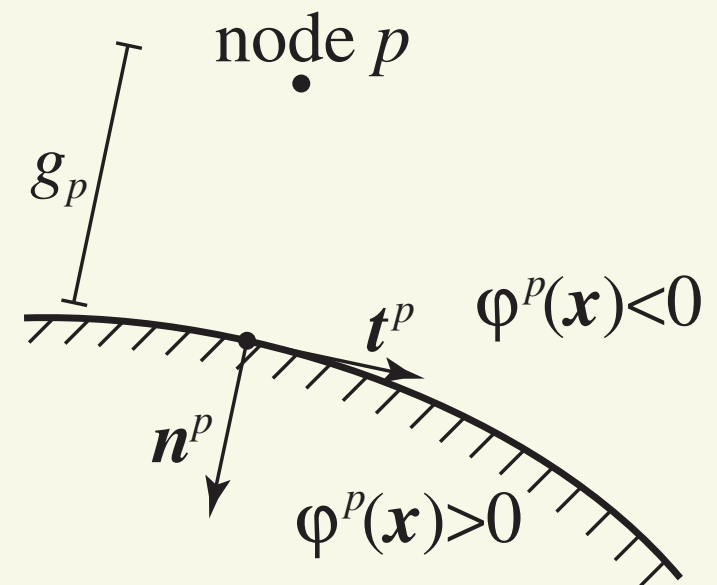
- ($n_c = |\mathcal{P}_c|$ とおいて)

$$\phi(\mathbf{u}) := \begin{bmatrix} \varphi^1(\mathbf{x}^1(\mathbf{u})) \\ \vdots \\ \varphi^{n_c}(\mathbf{x}^{n_c}(\mathbf{u})) \end{bmatrix}$$

- Non-penetration condition は

$$\mathbf{g} := -\phi(\mathbf{u}) \geq 0$$

と書ける



接触問題の支配式

- 非線形相補性問題

$$\nabla\pi(\mathbf{u}) = \lambda\bar{\mathbf{f}} + \nabla\phi(\mathbf{u})^T \mathbf{r}$$

$$\mathbf{g} = -\phi(\mathbf{u})$$

$$g_p \geq 0, \quad r_p \leq 0, \quad g_p r_p = 0 \quad (p \in \mathcal{P}_c)$$

- 変数：

- λ : 荷重パラメータ

- $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^d$: 変位

- $\mathbf{g} \in \mathbf{R}^{n_c}$: ギャップ

- $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{n_c}$: 反力

- $\pi : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$: ひずみエネルギー関数

- $\bar{\mathbf{f}} \in \mathbf{R}^d$: 荷重パターン

接触問題の支配式

- 非線形相補性問題

$$\nabla\pi(\mathbf{u}) = \lambda\bar{\mathbf{f}} + \nabla\phi(\mathbf{u})^T\mathbf{r}$$

$$\mathbf{g} = -\phi(\mathbf{u})$$

$$g_p \geq 0, \quad r_p \leq 0, \quad g_p r_p = 0 \quad (p \in \mathcal{P}_c)$$

- 変数：

- λ ：荷重パラメータ

- $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^d$ ：変位

- $\mathbf{g} \in \mathbf{R}^{n_c}$ ：ギャップ

- $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{n_c}$ ：反力

- → 再定式化法 & 平滑化法 を提案

(...+ warm-start 法)

再定式化法

- 相補性問題を非線形方程式系に“再定式化”して解く手法
- 相補性条件

$$x_p \geq 0, \quad s_p \geq 0, \quad x_p s_p = 0 \quad (\heartsuit)$$

- 相補性関数 $\psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$

$$\psi(x_p, s_p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\heartsuit)$$

再定式化法

- 相補性問題を非線形方程式系に“再定式化”して解く手法
- 相補性条件

$$x_p \geq 0, \quad s_p \geq 0, \quad x_p s_p = 0 \quad (\heartsuit)$$

- 相補性関数 $\psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$

$$\psi(x_p, s_p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\heartsuit)$$

- 例 :

- $\min\{x_p, s_p\}$

- $\sqrt{x_p^2 + s_p^2} - (x_p + s_p)$ [Fischer–Burmeister 関数]

- 相補性関数は通常 nonsmooth (微分不可能な点が存在)

再定式化法

- 相補性問題を非線形方程式系に“再定式化”して解く手法
- 相補性問題 $(f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+m})$

$$f(x, y, s) = 0$$

$$x_p \geq 0, \quad s_p \geq 0, \quad x_p s_p = 0 \quad (p = 1, \dots, n)$$

は、非線形方程式系に帰着できる：

$$h(x, y, s) := \begin{bmatrix} f(x, y, s) \\ \psi(x_1, s_1) \\ \vdots \\ \psi(x_n, s_n) \end{bmatrix} = 0$$

再定式化法

- 相補性問題を非線形方程式系に“再定式化”して解く手法
- 相補性問題 $(f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+m})$

$$f(x, y, s) = 0$$

$$x_p \geq 0, \quad s_p \geq 0, \quad x_p s_p = 0 \quad (p = 1, \dots, n)$$

は、非線形方程式系に帰着できる：

$$h(x, y, s) := \begin{bmatrix} f(x, y, s) \\ \psi(x_1, s_1) \\ \vdots \\ \psi(x_n, s_n) \end{bmatrix} = 0$$

- 基本的には、 $h(x, y, s) = 0$ を Newton 法で解く
 - nonsmooth Newton 法 [Pang 90], [Christensen & Pang 98], etc.

- 再定式化法 で得られた 非線形方程式系を “平滑化して” 解く

- $$h(x, y, s) = 0 \quad (\text{再定式化})$$

h は nonsmooth (微分不可能な点が存在)

- 一般に...

次の性質をもつ g_ν を “ g の平滑化関数” と呼ぶ :

- 任意の $\nu > 0$ に対して, g_ν は連続微分可能
- 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して, $\lim_{\nu \searrow 0} g_\nu(x) = g(x)$

($g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ は nonsmooth)

($\nu > 0$ は平滑化パラメータ)

($g_\nu : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ は関数の族)

- 再定式化法 で得られた 非線形方程式系を “平滑化して” 解く

- $$h(x, y, s) = 0 \quad (\text{再定式化})$$

h は nonsmooth (微分不可能な点が存在)

- 平滑化関数の例 :

- $\sqrt{(x_p - s_p)^2 + 4\nu} - (x_p + s_p)$

[← $\min\{x_p, s_p\}$ の平滑化]

- $\sqrt{x_p^2 + s_p^2 + 2\nu} - (x_p + s_p)$

[← FB 関数の平滑化]

[Kanzow 96]

(FB 関数は $\sqrt{x_p^2 + s_p^2} - (x_p + s_p)$)

再定式化法 & 平滑化法

- 再定式化法 で得られた 非線形方程式系を “平滑化して” 解く

- $$h(x, y, s) = 0 \quad (\text{再定式化})$$

h は nonsmooth (微分不可能な点が存在)

- Newton 法を用いて ($\nu \searrow 0$ としながら)

$$h_\nu(x, y, s) = 0 \quad (\text{平滑化})$$

を解く

接触問題の再定式化 & 平滑化

- パラメータを $\nu > 0$ として

$$\nabla \pi(\mathbf{u}) = \lambda \bar{\mathbf{f}} + \nabla \phi(\mathbf{u})^T \mathbf{r}$$

$$\mathbf{g} = -\phi(\mathbf{u})$$

$$\psi_{\nu}^{\text{FB}}(\mathbf{g}_p, -r_p) = 0 \quad (p \in \mathcal{P}_c)$$

- Newton 法を用いるので, 自然に warm-start できそう
- 残るは
 - ν の初期値の決め方
 - ν の減らし方

(ψ_{ν}^{FB} : 平滑化 FB 関数)

Implicit formulation

- 平滑化 Fischer–Burmeister 関数で ν も変数とみなす :

$$\tilde{\psi}_{\text{FB}}(x_p, s_p, \nu) = \sqrt{x_p^2 + s_p^2 + 2\nu} - (x_p + s_p)$$

- 方程式 $\eta_1(c^2) = \eta_2(c)$ が
 - $c = 0$ が 非退化な唯一の解

を満たすように、微分可能な関数 $\eta_1, \eta_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を選ぶと

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\text{FB}}(x_p, s_p, \nu) = 0 \quad (p = 1, \dots, n) \\ \eta_1(\mathbf{x}^T \mathbf{s} / n) = \eta_2(\nu) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \nu = 0$$

- ポイント :
 $\nu = 0$ が自動的に解になるように等式制約を 1 つ付け加える

接触条件の implicit formulation

- ν も変数とみなして

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{\text{FB}}(g_p, -r_p, \nu) &= 0 & (p \in \mathcal{P}_c) & \quad (\diamond) \\ \eta_1(-\mathbf{g}^T \mathbf{r} / n_c) &= \eta_2(\nu)\end{aligned}$$

- η_1, η_2 の例 :

- $\eta_1(c) = c + 1, \eta_2(c) = e^c$
- $\eta_1(c) = c, \eta_2(c) = c + c^3$

接触条件の implicit formulation

- ν も変数とみなして

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{\text{FB}}(g_p, -r_p, \nu) &= 0 & (p \in \mathcal{P}_c) & \quad (\diamond) \\ \eta_1(-\mathbf{g}^T \mathbf{r} / n_c) &= \eta_2(\nu)\end{aligned}$$

- η_1, η_2 の例 :

- $\eta_1(c) = c + 1, \eta_2(c) = e^c$

- 通常の Newton 法 を適用する

- 唯一の解が

$$g_p \geq 0, r_p \leq 0, g_p r_p = 0 \quad (p \in \mathcal{P}_c), \quad \nu = 0$$

- Newton 法の更新により, 自然に $\nu \searrow 0$ となる

接触条件の implicit formulation

- ν も変数とみなして

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{\text{FB}}(g_p, -r_p, \nu) &= 0 & (p \in \mathcal{P}_c) & \quad (\diamond) \\ \eta_1(-\mathbf{g}^T \mathbf{r} / n_c) &= \eta_2(\nu)\end{aligned}$$

- η_1, η_2 の例 :

- $\eta_1(c) = c + 1, \eta_2(c) = e^c$
- このとき (\diamond) は

$$\nu = \log \left(-\frac{1}{n_c} \mathbf{g}^T \mathbf{r} + 1 \right)$$

← “ ν = 相補性条件の (対数ではかった) 残差” とみなせる

接触問題に対する弧長法の implicit formulation

- 載荷ステップ $k + 1$ での釣合解を求める :

$$\nabla \pi(\mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u}) = (\lambda^k + \Delta \lambda) \bar{\mathbf{f}} + \nabla \phi(\mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u})^T \mathbf{r}$$

$$\mathbf{g} = -\phi(\mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u})$$

$$\tilde{\psi}_{\text{FB}}(g_p, -r_p, \nu) = 0 \quad (p \in \mathcal{P}_c)$$

$$\eta_1(-\mathbf{g}^T \mathbf{r} / n_c) = \eta_2(\nu)$$

$$\|(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{r}, \Delta \lambda)\| = \bar{\theta}$$

接触問題に対する弧長法の implicit formulation

- 载荷ステップ $k + 1$ での釣合解を求める：

$$\nabla\pi(\mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u}) = (\lambda^k + \Delta\lambda)\bar{\mathbf{f}} + \nabla\phi(\mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u})^T \mathbf{r}$$

$$\mathbf{g} = -\phi(\mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u})$$

$$\tilde{\psi}_{\text{FB}}(g_p, -r_p, \nu) = 0 \quad (p \in \mathcal{P}_c)$$

$$\eta_1(-\mathbf{g}^T \mathbf{r} / n_c) = \eta_2(\nu)$$

$$\|(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{r}, \Delta\lambda)\| = \bar{\theta}$$

- 前の载荷ステップの解 $(\Delta\mathbf{u}^k, \mathbf{r}^k, \Delta\lambda^k)$ を初期解とする
- “残差” の表現： $\nu = \log\left(-\frac{1}{n_c}\mathbf{g}^T \mathbf{r} + 1\right)$ から、 ν の初期解も自然に決まる
- Newton 法を実行する過程で、 $\nu = 0$ (かつ、 $\exists p : g_p = r_p = 0$) となることは、あまりなさそう

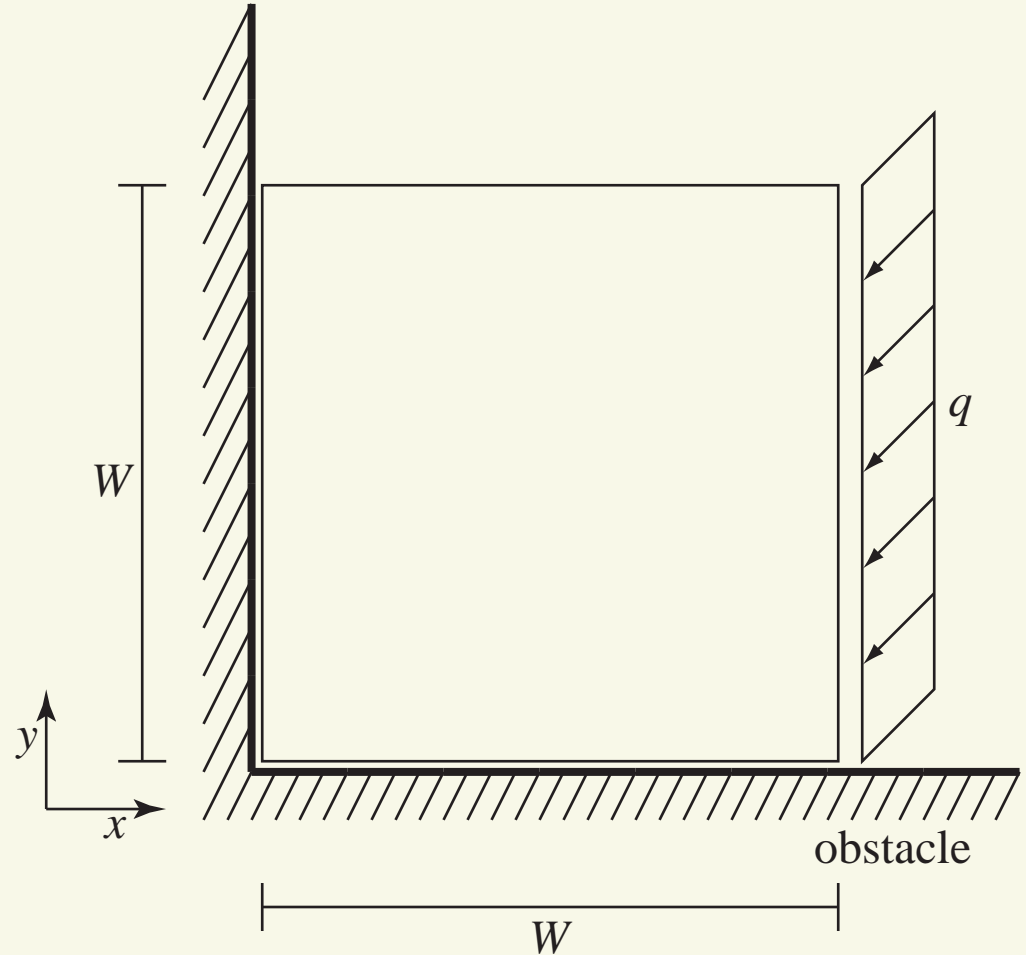
ex.) 線形弾性体

- コールド・スタートの実験

- ヤング率 $E = 100 \text{ MPa}$
ポアソン比 $\nu = 0.3$
平面応力状態

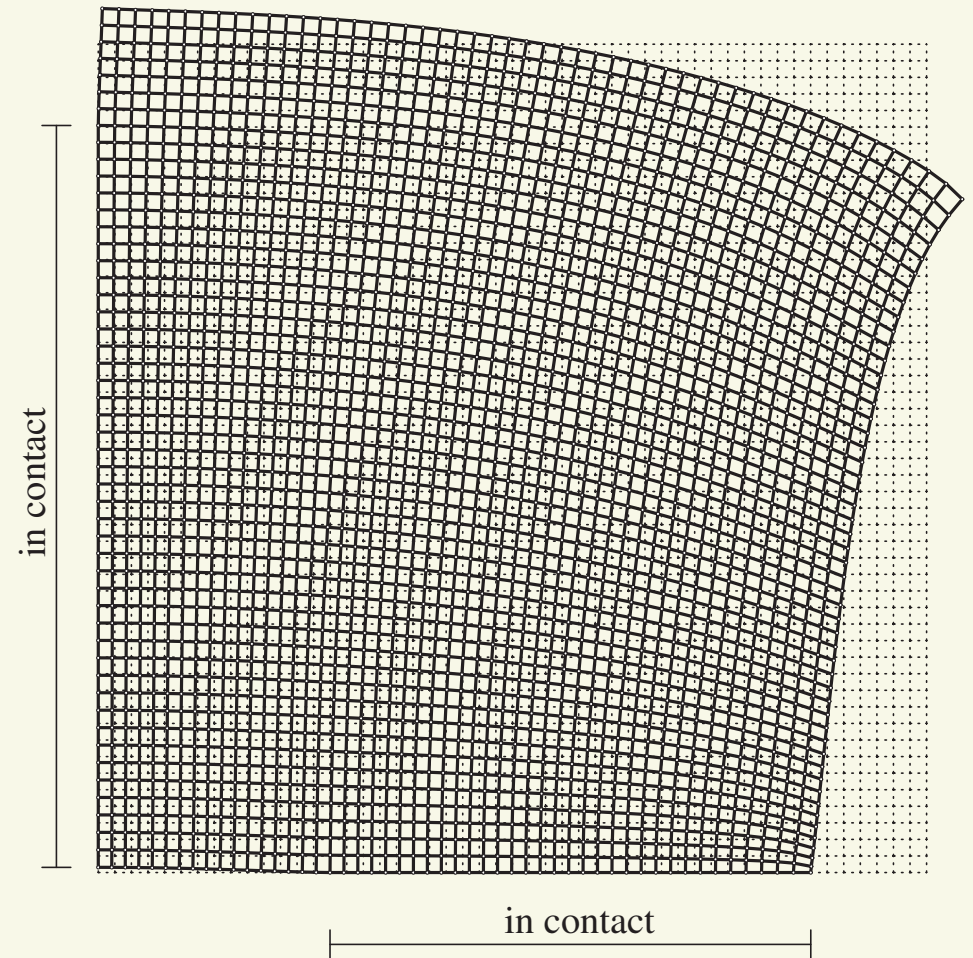
- $W = 2 \text{ m}, t = 10 \text{ mm}$

- $q_x = q_y = 0.5 \text{ MPa}$



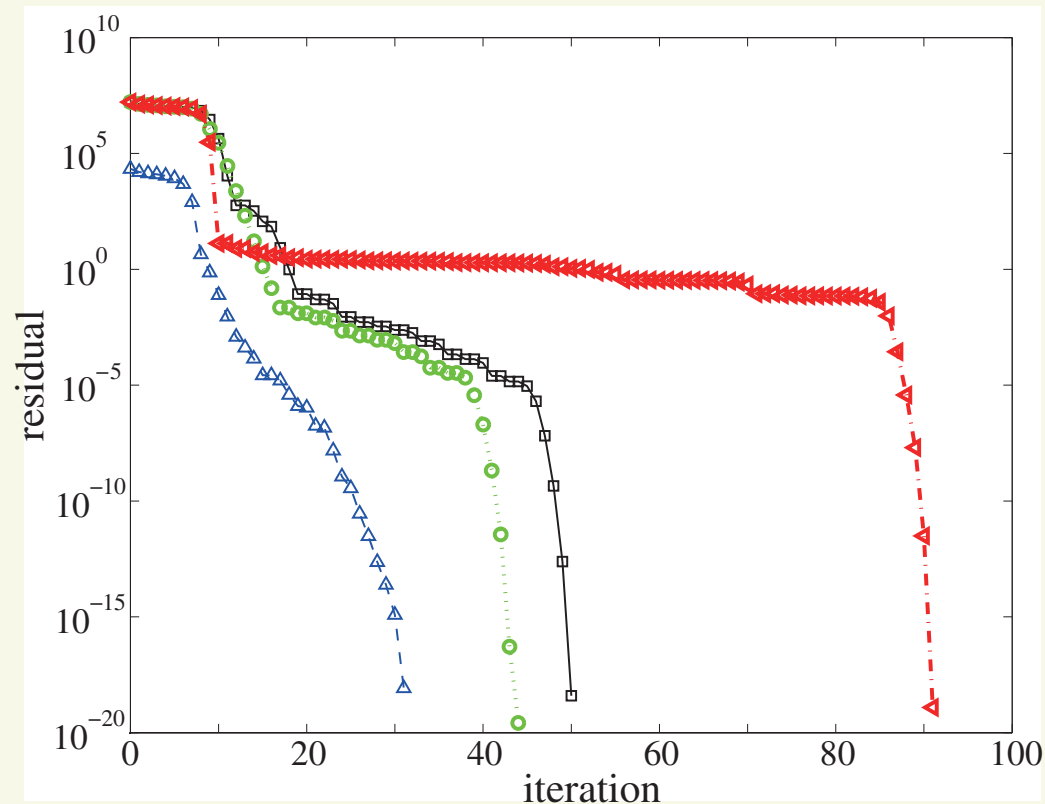
ex.) 線形弾性体

- コールド・スタートの実験
- ヤング率 $E = 100 \text{ MPa}$
ポアソン比 $\nu = 0.3$
平面応力状態
- $W = 2 \text{ m}$, $t = 10 \text{ mm}$
- $q_x = q_y = 0.5 \text{ MPa}$

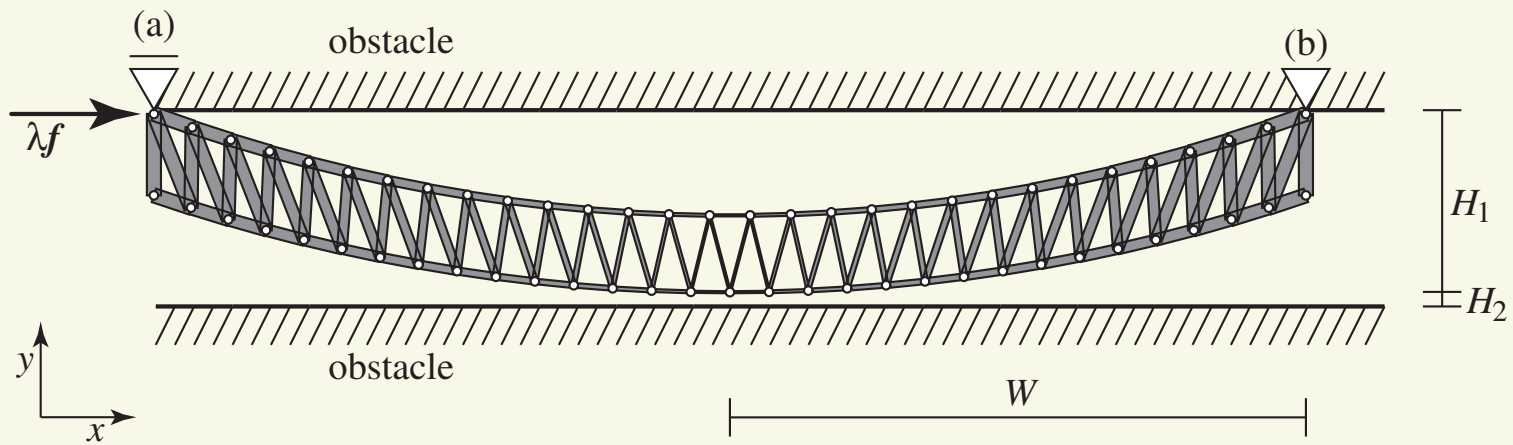


ex.) 線形弾性体

- ‘□’: Case 1, $\eta_1(c) = \gamma^2 c + 1$, $\eta_2(c) = e^{\gamma c}$ with $\gamma = 1$
- ‘○’: Case 2, $\eta_1(c) = c$, $\eta_2(c) = c + c^3$
- ‘△’: Case 3*, $\eta_1(c) = c/2$, $\eta_2(c) = c^2$ [degenerate]
- ‘◁’: Case 4, Fischer–Burmeister function [nonsmooth]

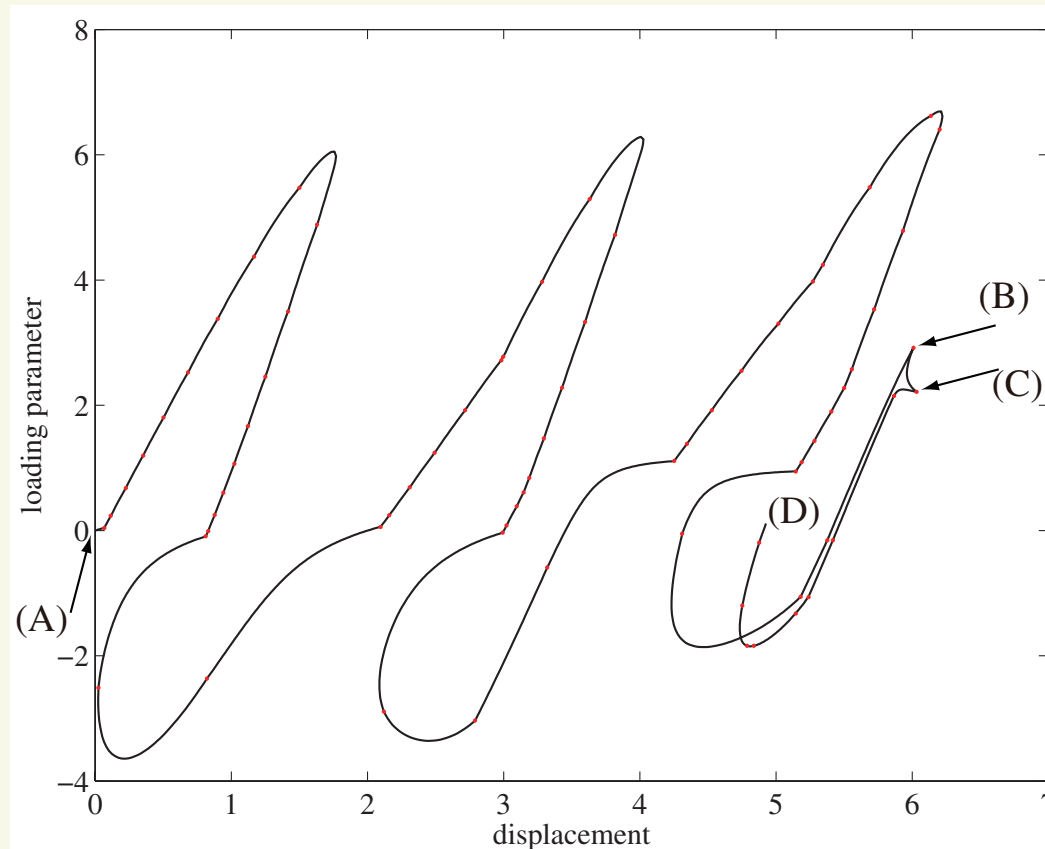
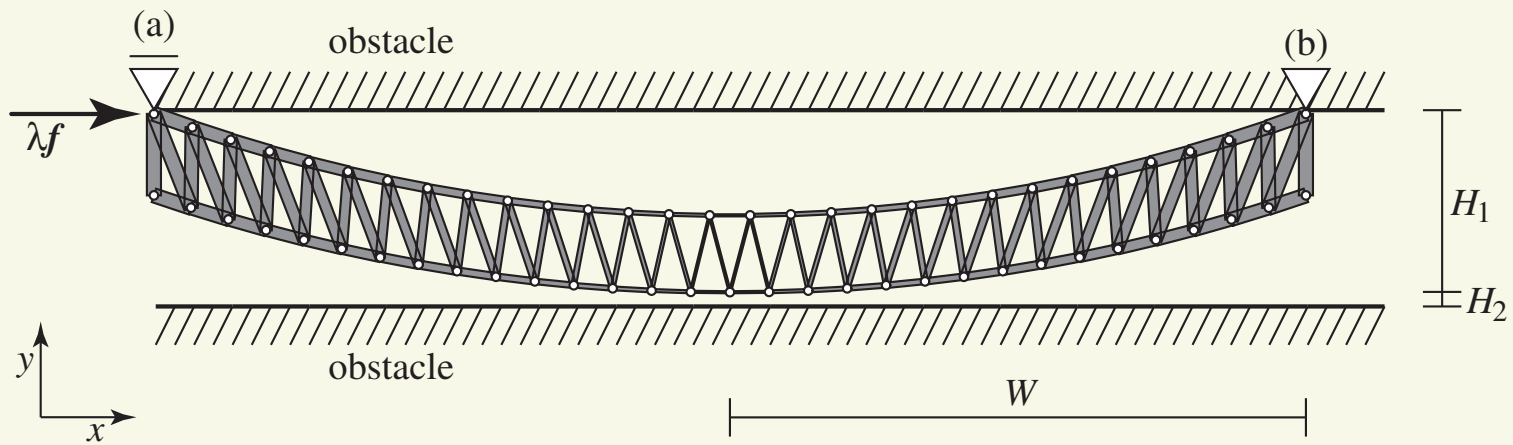


ex.) 大変形—2つの平面との接触

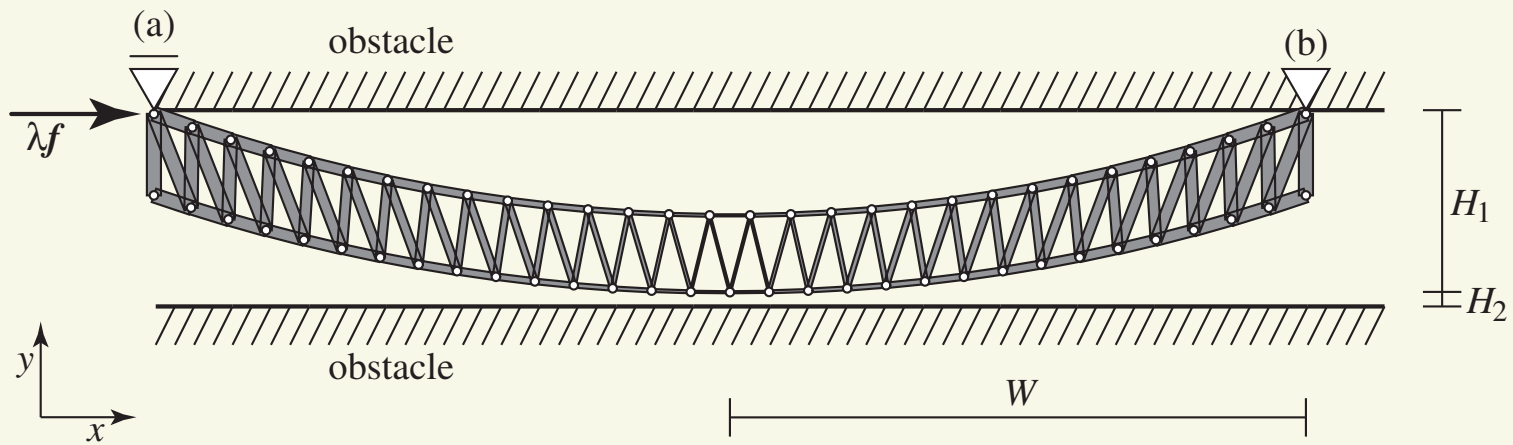


初期形状

ex.) 大変形—2つの平面との接触



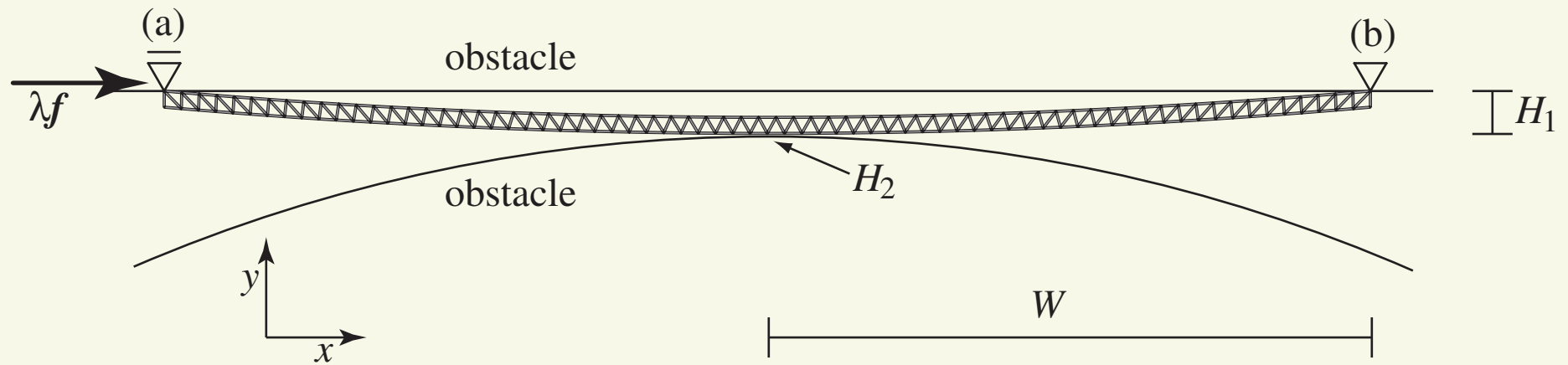
ex.) 大変形—2つの平面との接触



Newton 法の反復回数

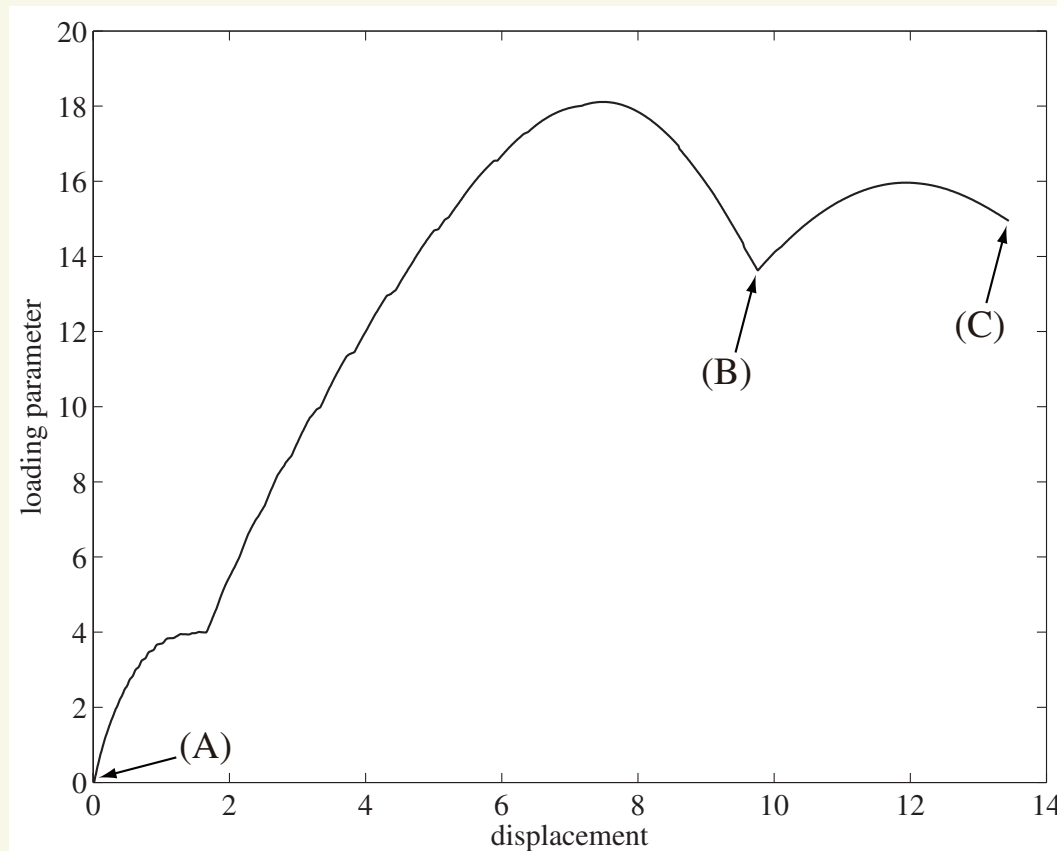
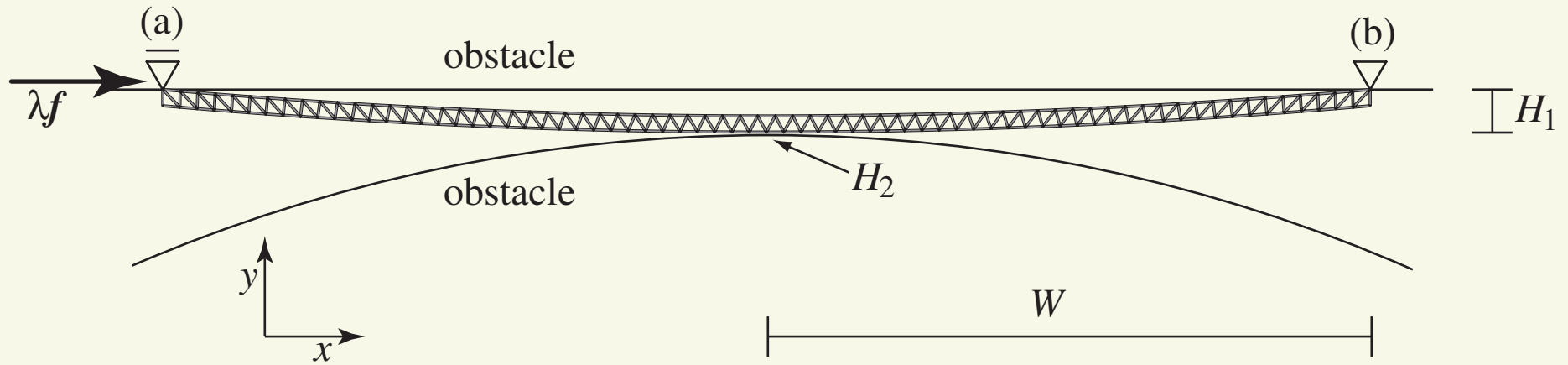
反復回数	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\leq n \leq 16$
頻度	273	836	139	79	26	8	2	1		5

ex.) 大変形—曲面との接触

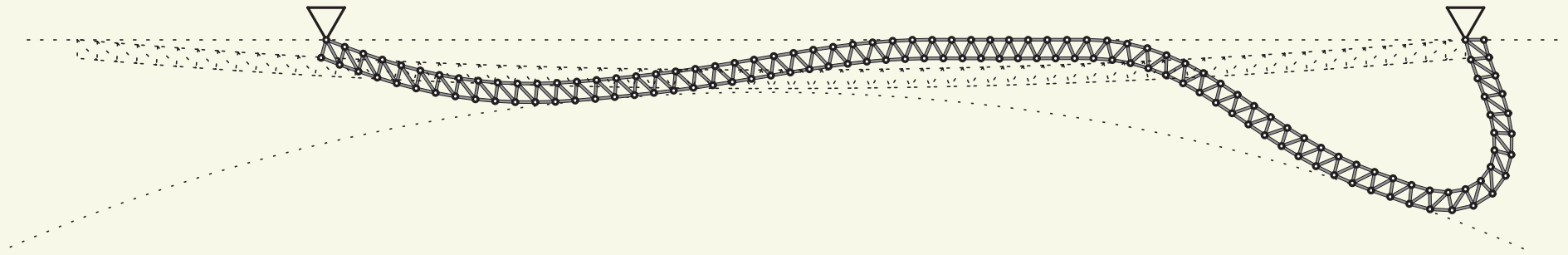


初期形状

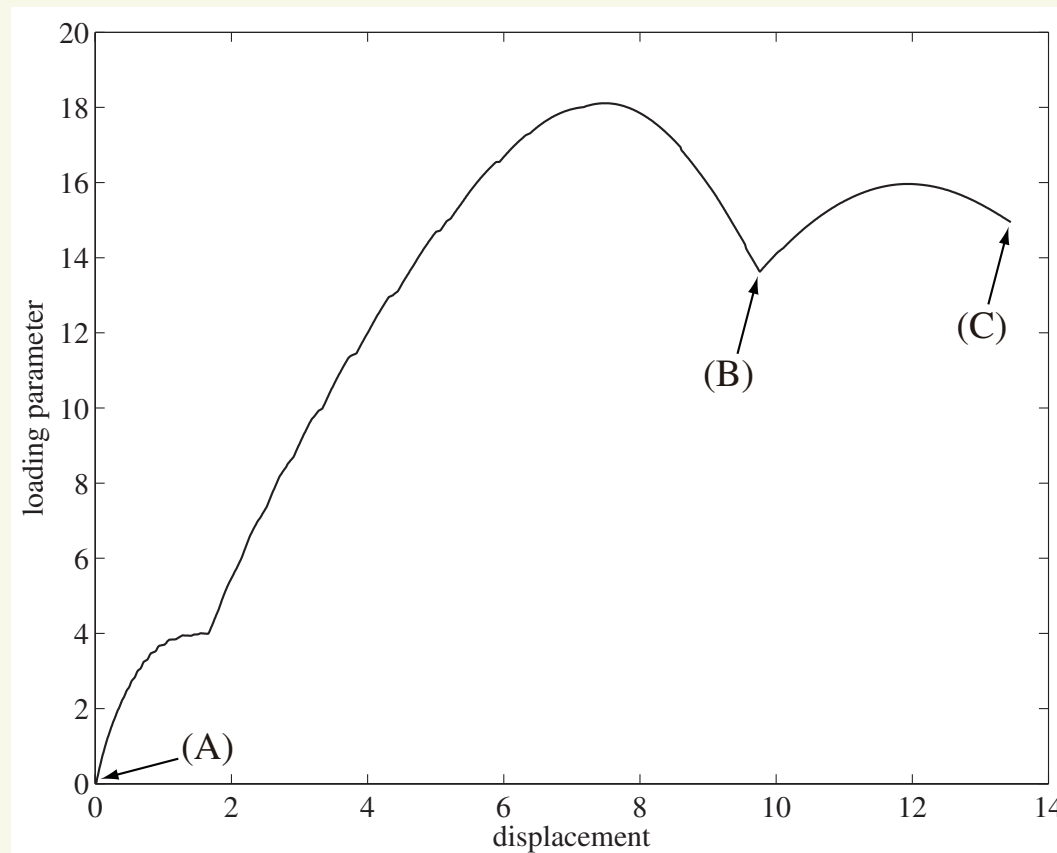
ex.) 大変形—曲面との接触



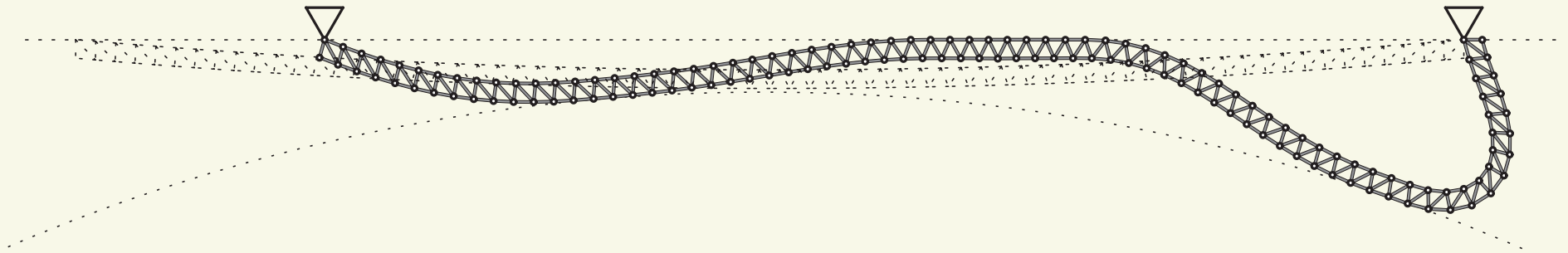
ex.) 大変形—曲面との接触



釣合形状



ex.) 大変形—曲面との接触



釣合形状

Newton 法の反復回数

# of iterations	3	4	5	6	7	8	9	10	12
frequency	1081	379	100	6	7	10	9	10	2

- 大変形を考慮した (摩擦のない) 接触問題
 - 非線形 相補性問題
 - 再定式化法 & 平滑化法
- 釣合経路解析
 - (互いに似た) 相補性問題を繰り返し解く
 - ウォーム・スタート法
 - 平滑化パラメータを変数とみなす
 - 前の载荷ステップの解を 良い初期解 として利用
 - Newton 法の反復回数は, ほとんどの場合 4 回以下

- 大変形を考慮した (摩擦のない) 接触問題
 - 非線形 相補性問題
 - 再定式化法 & 平滑化法
- 釣合経路解析
 - (互いに似た) 相補性問題を繰り返し解く
 - ウォーム・スタート法
 - 平滑化パラメータを変数とみなす
 - 前の载荷ステップの解を 良い初期解 として利用
 - Newton 法の反復回数は, ほとんどの場合 4 回以下
- 参考:
 - Y. Kanno: “*Nonsmooth Mechanics and Convex Optimization.*”
CRC Press (2011).