

負のポアソン比をもつ周期的な  
骨組構造物の最適設計法

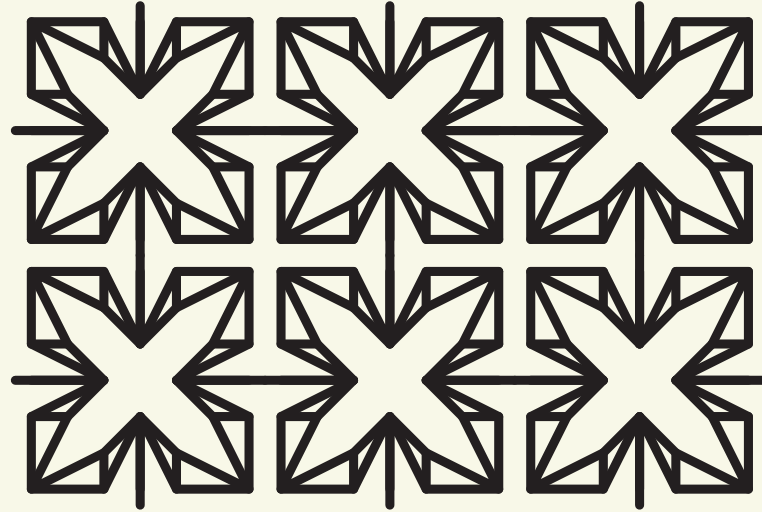
暮田 留依, 寒野 善博

September 4, 2014

数学協働・JSIAM ワークショップ「数理学の物質・材料科学への応用」

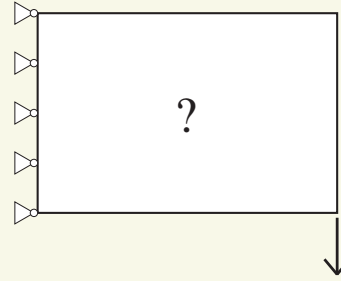
# 負のポアソン比をもつ構造物

- ... 一つの方に引っ張ると、直交方向にも広がる.





- 従来の構造物の設計法...



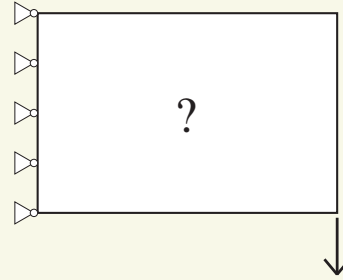
↓ 設計者・技術者

設計

- 設計者の長年の経験や勘に依存
  - → 直観に反する構造物の設計は困難
- 設計解が制約を満たせば終了
  - → よりよい設計解の存在に気づかない可能性

# 構造最適化

- 構造物の最適設計法（構造最適化） ...



↓ 最適化

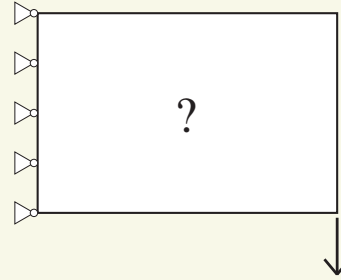


最適解

- 例：体積（or 重量）の制約の下で，剛性を最大化

# 構造最適化

- 構造物の最適設計法（構造最適化） ...



↓ 最適化



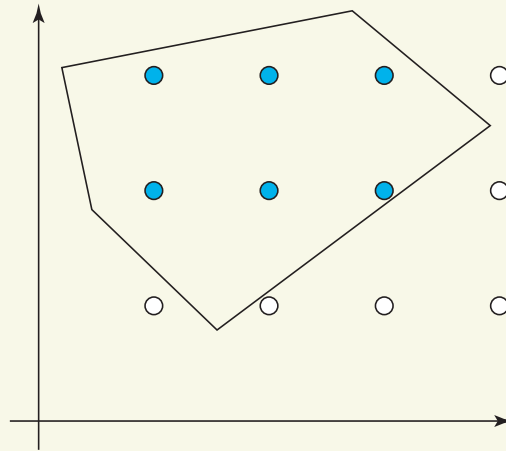
最適解

- 例：体積（or 重量）の制約の下で，剛性を最大化
  - 勘や経験への依存度が小さい（or 依存しない）.
  - → 合理的な設計や，直観に反する構造物の探索が可能.

- 本研究で用いる最適化手法

- 整数計画 とは

Minimize	$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$	(♣)
subject to	$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i \quad (i = 1, \dots, m),$	(◇)
	$x_j \in \{0, 1, 2, \dots, k\} \quad (j = 1, \dots, n).$	(◇)



- (♣) : 目的関数
- (◇) : 制約
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  : 設計変数 (最適化する変数)



- 整数計画 とは

Minimize	$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$	(♣)
subject to	$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i \quad (i = 1, \dots, m),$	(◇)
	$x_j \in \{0, 1, 2, \dots, k\} \quad (j = 1, \dots, n).$	(◇)

- 0-1 計画 :

$$x_j \in \{0, 1\}$$

# 混合整数計画

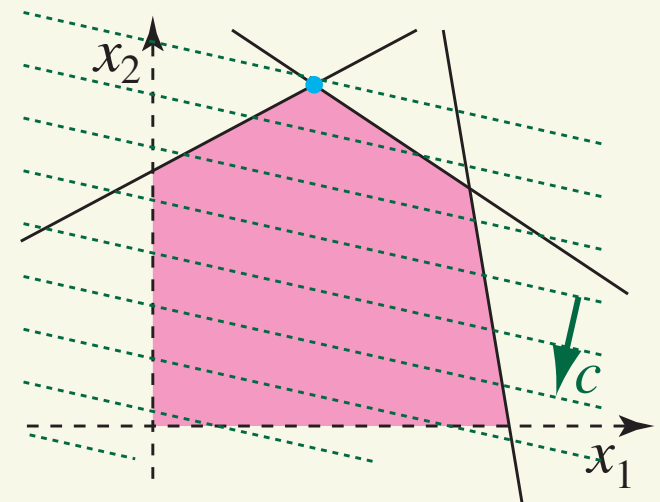
- 整数計画 とは

$$\begin{array}{lll} \text{Minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} & (\clubsuit) \\ \text{subject to} & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i \quad (i = 1, \dots, m), & (\diamond) \\ & x_j \in \{0, 1, 2, \dots, k\} \quad (j = 1, \dots, n). & (\diamond) \end{array}$$

- 0-1 計画 :

$$x_j \in \{0, 1\}$$

- 緩和 :  $0 \leq x_j \leq 1$
- 緩和問題 = 線形計画  
→ 整数計画の下界が得られる.



# 混合整数計画

- 混合整数計画 :

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{r}^T \mathbf{y} \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + \mathbf{g}_i^T \mathbf{y} \geq b_i \quad (i = 1, \dots, m), \\ & \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^l \end{aligned}$$

- “混合” :

- $x_j$  : 整数 (離散) 変数
- $y_l$  : 実数 (連続) 変数

- 制約  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$  を  $0 \leq \mathbf{x} \leq 1$  に緩和すると  
→ 線形計画

- 分枝限定法などにより大域的最適解が得られる.  
→ 緩和問題が簡単に解けることがポイント

# 負のポアソン比（auxetic 性）をもつ材料

- 自然界の例

- カドミウム

[Li '76]

- ヒ素の単結晶

[Gunton & Saunders '72]

- 熱分解黒鉛

[Garber '63]

- 人工物の例

- 泡構造

[Lakes '87]

- re-entrant structure

[Friis, Lakes, & Park '88] [Evans, Alderson, & Christian '95]

# 負のポアソン比（auxetic 性）をもつ材料

- 自然界の例

- カドミウム

[Li '76]

- ヒ素の単結晶

[Gunton & Saunders '72]

- 熱分解黒鉛

[Garber '63]

- 人工物の例

- 泡構造

[Lakes '87]

- re-entrant structure

[Friis, Lakes, & Park '88] [Evans, Alderson, & Christian '95]

- 応用（の可能性）

- 調節機能つきフィルタ

[Alderson *et al.* '00]

- ファスナ

[Choi & Lakes '91]

- 人工の椎間板

[Martz, Lakes, Goel, & Park '05]

# 最適化による負のポアソン比

- 既存の手法：
  - 周期的なトラスとしてモデル化 [Sigmund '94]
  - 連続体 & 均質化法  
[Larsen, Sigmund, & Bouwstra '97] [Schwerdtfeger *et al.* '11]
  - 連続体 & 遺伝アルゴリズム [Matsuoka, Yamamoto, & Takahara '01]

# 最適化による負のポアソン比

- 既存の手法：
  - 周期的なトラスとしてモデル化 [Sigmund '94]
  - 連続体 & 均質化法  
[Larsen, Sigmund, & Bouwstra '97] [Schwerdtfeger *et al.* '11]
  - 連続体 & 遺伝アルゴリズム [Matsuoka, Yamamoto, & Takahara '01]
- 応力制約 なし
- 解の後処理（解釈）が必要：グレー・スケール & ヒンジ

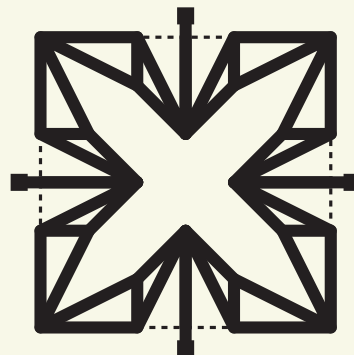
# 最適化による負のポアソン比

- 既存の手法：

- 周期的なトラスとしてモデル化 [Sigmund '94]
- 連続体 & 均質化法  
[Larsen, Sigmund, & Bouwstra '97] [Schwerdtfeger *et al.* '11]
- 連続体 & 遺伝アルゴリズム [Matsuoka, Yamamoto, & Takahara '01]

- 提案手法：

- 周期的な骨組構造
- 応力制約を厳密に考慮 → 細すぎる部材やヒンジを含まない.





# 最適化による負のポアソン比

- 既存の手法：

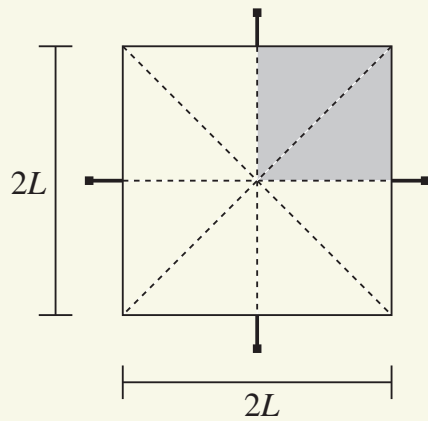
- 周期的なトラスとしてモデル化 [Sigmund '94]
- 連続体 & 均質化法  
[Larsen, Sigmund, & Bouwstra '97] [Schwerdtfeger *et al.* '11]
- 連続体 & 遺伝アルゴリズム [Matsuoka, Yamamoto, & Takahara '01]

- 提案手法：

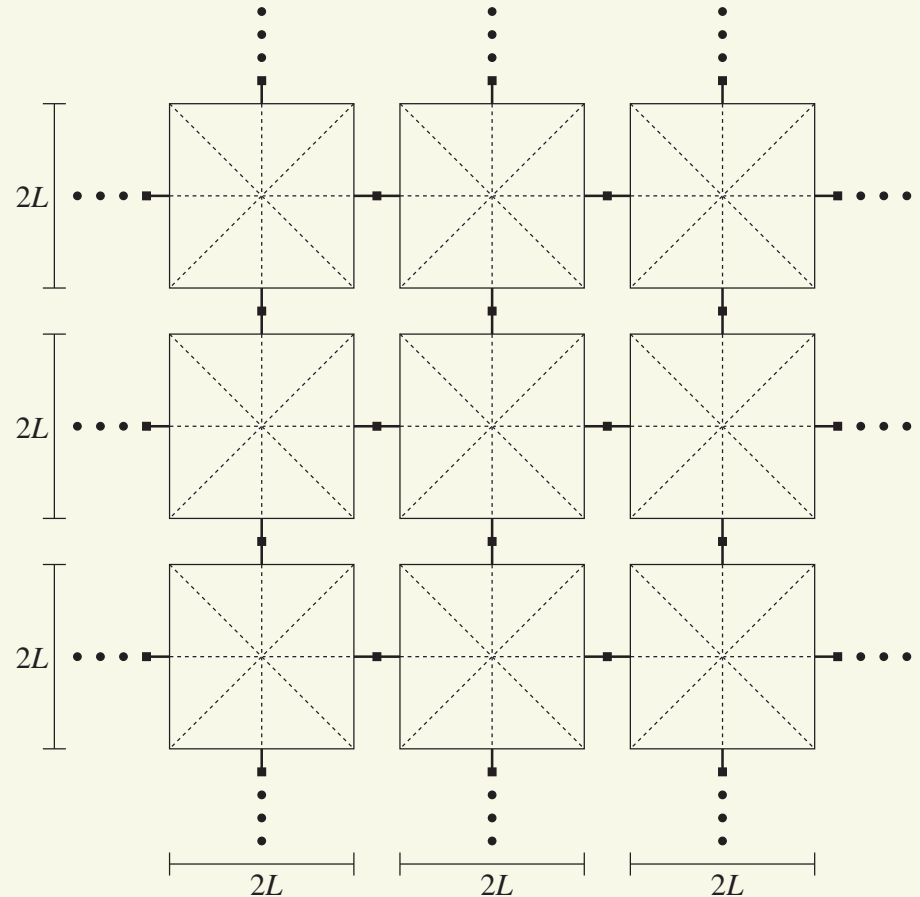
- 周期的な骨組構造
- 応力制約を厳密に考慮 → 細すぎる部材やヒンジを含まない。
- → 製造のし易さ（後処理が不要）
- → 整数計画による大域的最適化
  - 定式化のアイデア：トラスの最適化手法  
[Rasmussen & Stolpe '08] [K. & Guo '10]

# 問題設定

- 周期性 & 対称性を仮定
- ユニット：平面骨組構造
- 設計変数：部材の存在／除去（断面寸法は予め与える）



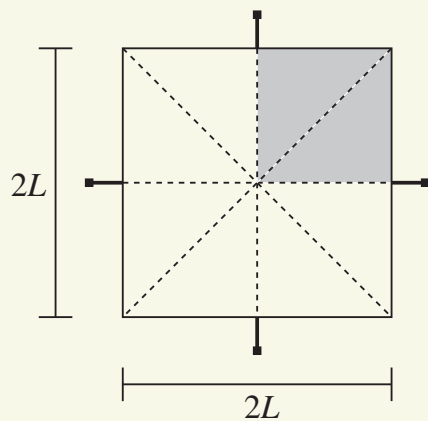
ユニット



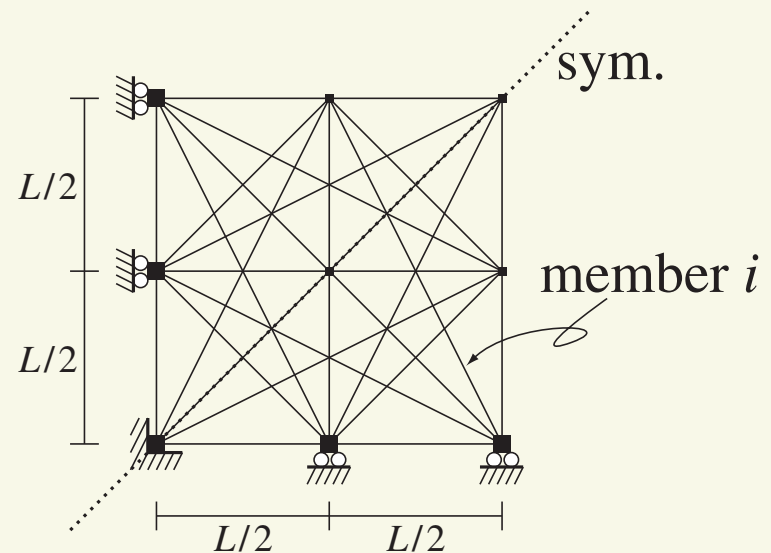
周期性

# 問題設定

- 周期性 & 対称性を仮定
- ユニット：平面骨組構造
- 設計変数：部材の存在／除去（断面寸法は予め与える）
  - $x_i$ ：整数変数
    - $x_i = 1 \Rightarrow$  部材  $i$  が存在
    - $x_i = 0 \Rightarrow$  部材  $i$  を除去



ユニット



設計領域

# 問題設定

- 周期性 & 対称性 を 仮定
- ユニット：平面 骨組構造
- 設計変数：部材の存在／除去（断面寸法は予め与える）
- より一般に...

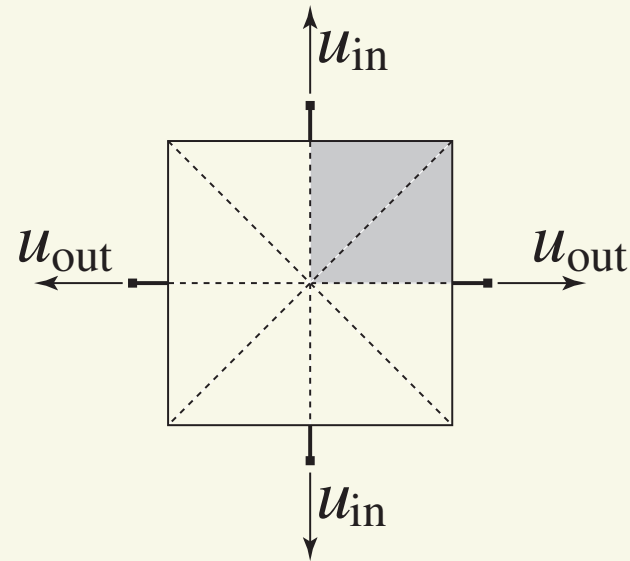
“断面寸法のカタログ” =  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_P\}$

- $x_{ip} = 1 \Rightarrow$  部材  $i$  に寸法  $\bar{a}_p$  を採用
- $x_{i1} = \dots = x_{iP} = 0 \Rightarrow$  部材  $i$  を除去

$$\sum_p x_{ip} \leq 1$$

- “部材  $i$  の寸法” =  $\sum_p x_{ip} \bar{a}_p$

max  $u_{out}$   
s. t. 釣合式  
入力変位  $u_{in}$  を指定  
応力制約  
交差する部材を除く制約



- → 混合整数計画 (MIP) に帰着

# MIP への帰着 (1)

- 釣合式 :

$$Ku = f$$

- 剛性行列 :

$$K = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^3 k_{ij} \mathbf{b}_{ij} \mathbf{b}_{ij}^T \quad (\mathbf{b}_{ij} : \text{定ベクトル})$$

- 部材の剛性 :

$$k_{ij} = \bar{k}_{ij} x_i \quad (\bar{k}_{ij} : \text{定数})$$

- 部材の存在を表す 整数変数 :

$$x_i = \begin{cases} 1 & (\text{部材 } i \text{ が存在するとき}) \\ 0 & (\text{部材 } i \text{ を除去するとき}) \end{cases}$$

- → これらの制約を 線形制約に帰着する.

## MIP への帰着 (2)

- 釣合式  $K\mathbf{u} = \mathbf{f} \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^3 \bar{k}_{ij} v_{ij} \mathbf{b}_{ij} = \mathbf{f}$$

(内力と外力の関係)

$$v_{ij} = \begin{cases} \mathbf{b}_{ij}^T \mathbf{u} & \text{if } x_i = 1 & (\diamond) \\ 0 & \text{if } x_i = 0 & (\clubsuit) \end{cases}$$

(適合条件)

- 応力制約 :

$$\frac{|q_i(\mathbf{u})|}{q_i^y} + \frac{|m_i^{(e)}(\mathbf{u})|}{m_i^y} \leq 1$$

(♠)

## MIP への帰着 (2)

- 釣合式  $K\mathbf{u} = \mathbf{f} \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^3 \bar{k}_{ij} v_{ij} \mathbf{b}_{ij} = \mathbf{f} \quad (\text{内力と外力の関係})$$

$$v_{ij} = \begin{cases} \mathbf{b}_{ij}^T \mathbf{u} & \text{if } x_i = 1 \quad (\diamond) \\ 0 & \text{if } x_i = 0 \quad (\clubsuit) \end{cases} \quad (\text{適合条件})$$

- 応力制約 :

$$\frac{|q_i(\mathbf{u})|}{q_i^y} + \frac{|m_i^{(e)}(\mathbf{u})|}{m_i^y} \leq 1 \quad (\spadesuit)$$

- $(\clubsuit) \ \& \ (\spadesuit) \Leftrightarrow \frac{\bar{k}_{i1}}{q_i^y} |v_{i1}| + \frac{l_i \bar{k}_{i2}}{2 m_i^y} |v_{i2}| + \frac{\bar{k}_{i3}}{m_i^y} |v_{i3}| \leq x_i$

- $(\diamond) \Leftrightarrow |v_{ij} - \mathbf{b}_{ij}^T \mathbf{u}| \leq M(1 - x_i) \quad (M \gg 0 : \text{定数})$

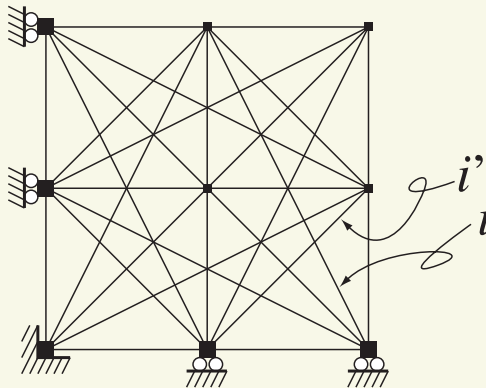


# 得られた定式化

$$\begin{aligned} \max \quad & u_{\text{out}} \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i \in E} \sum_{j=1}^3 \bar{k}_{ij} v_{ij} \mathbf{b}_{ij} = \mathbf{f}, \\ & |v_{ij} - \mathbf{b}_{ij}^T \mathbf{u}| \leq M(1 - x_i), \quad \forall j, \forall i, \\ & \frac{\bar{k}_{i1}}{q_i^y} |v_{i1}| + \frac{l_i \bar{k}_{i2}}{2 m_i^y} |v_{i2}| + \frac{\bar{k}_{i3}}{m_i^y} |v_{i3}| \leq x_{ip}, \quad \forall i, \\ & x_{ip} \in \{0, 1\}, \quad \forall i. \end{aligned}$$

- 交差する部材を除く制約：

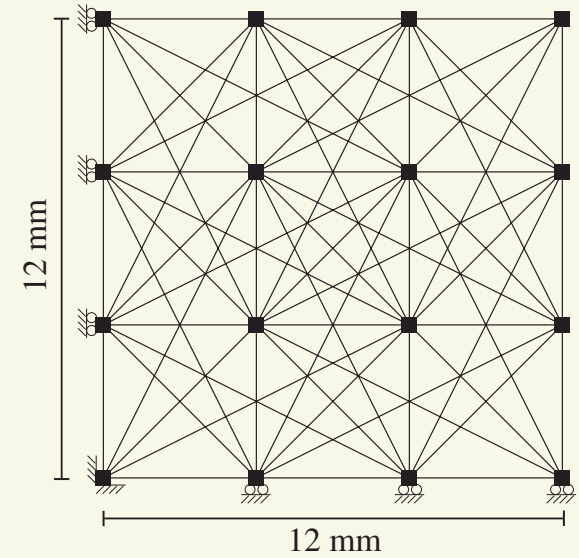
$$x_i + x_{i'} \leq 1$$



- (整数制約 以外は) すべて線形制約

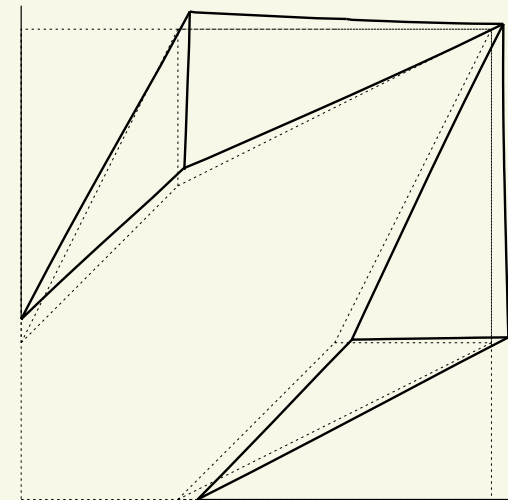
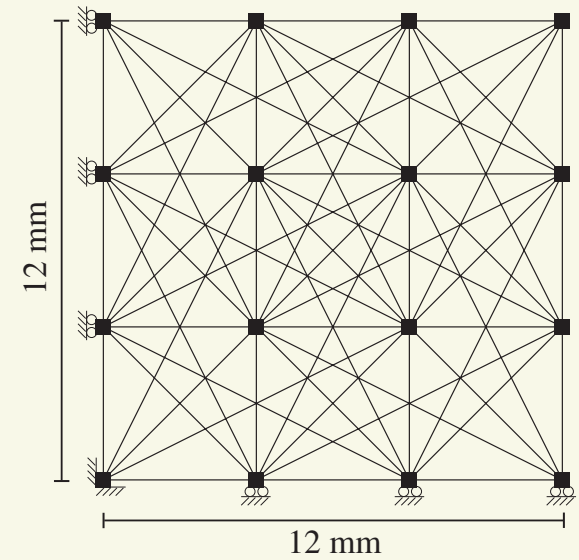
## 例) MIP を用いた大域的最適化

- 部材の候補は 66 本
- Timoshenko 梁
- ソルバ :  
CPLEX ver. 12.2
  
- 部材断面は長方形
  - 幅 × 厚さ =  $0.5 \times 0.5$  mm
  
  - 幅 × 厚さ =  $1 \times 0.25$  mm

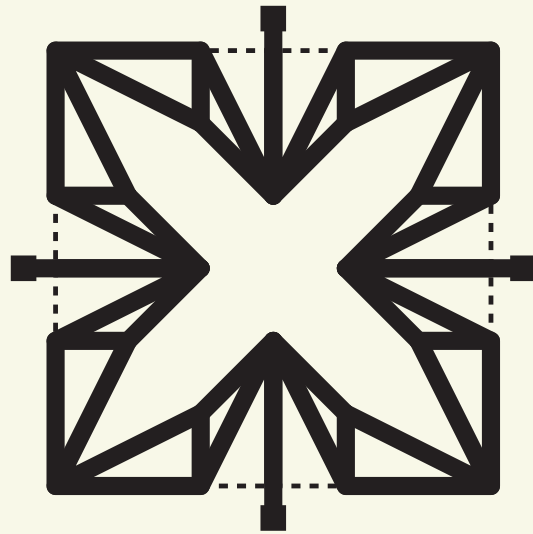


## 例) MIP を用いた大域的最適化

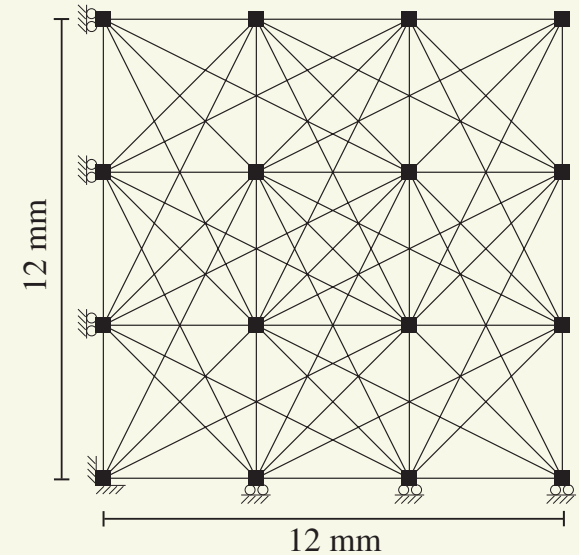
- 部材の候補は 66 本
- Timoshenko 梁
- ソルバ :  
CPLEX ver. 12.2
  
- 部材断面は長方形
  - 幅 × 厚さ =  $0.5 \times 0.5$  mm  
→  $\nu = -0.832887$
  - 幅 × 厚さ =  $1 \times 0.25$  mm  
→  $\nu = -0.752017$



# 例) MIP を用いた大域的最適化



最適ユニット



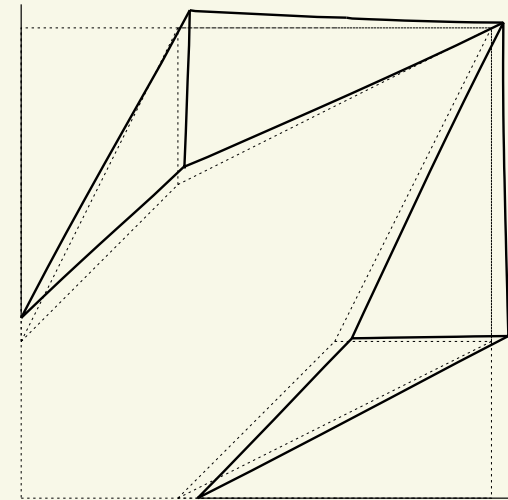
- 部材断面は長方形

- 幅 × 厚さ =  $0.5 \times 0.5$  mm

- $\nu = -0.832887$

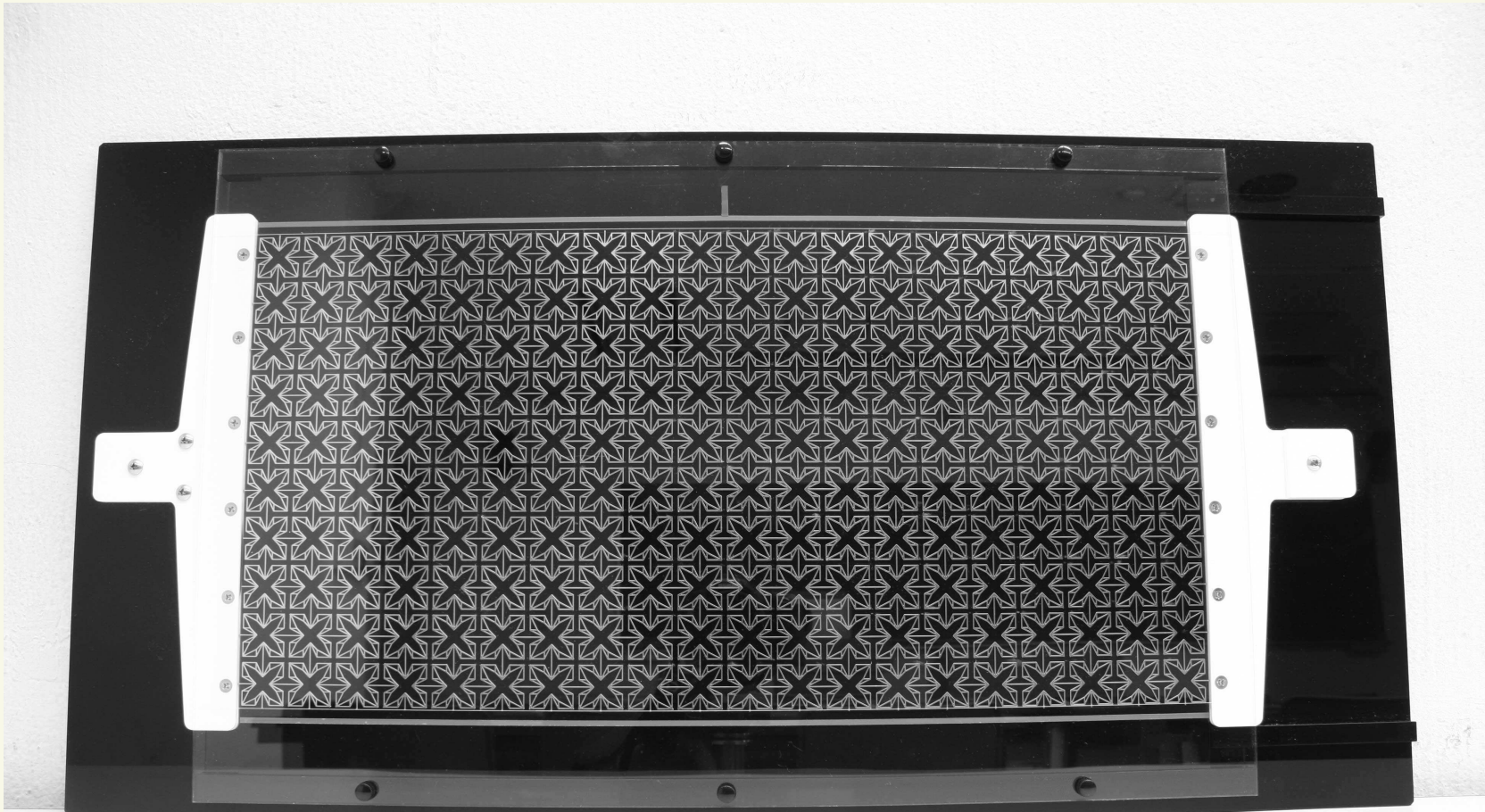
- 幅 × 厚さ =  $1 \times 0.25$  mm

- $\nu = -0.752017$



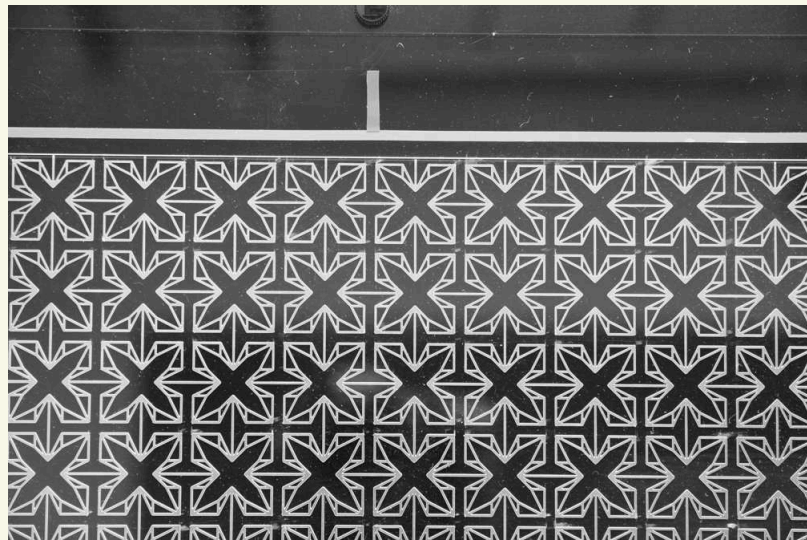
# 最適解の模型

- フォトエッチング
- ステンレス
  - 各部材は 0.5 mm 厚, 0.75 mm 幅

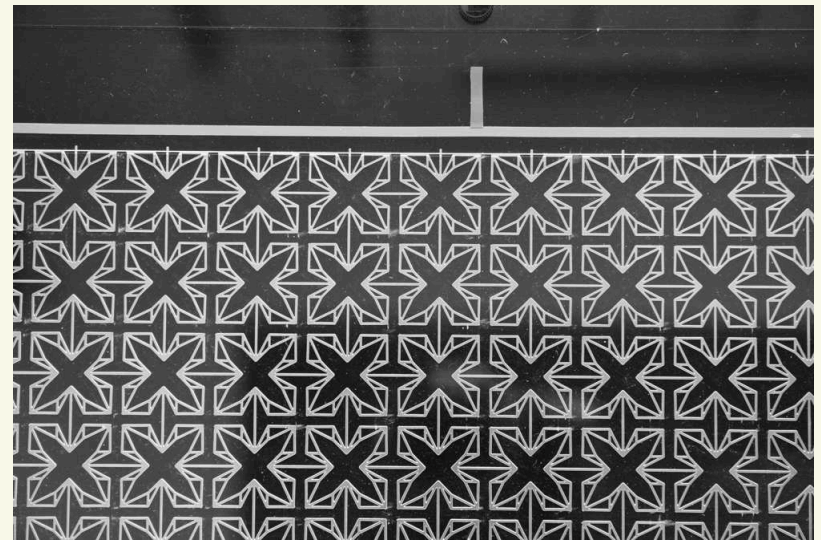


# 最適解の模型

- フォトエッチング
- ステンレス
  - 各部材は 0.5 mm 厚, 0.75 mm 幅



変形前



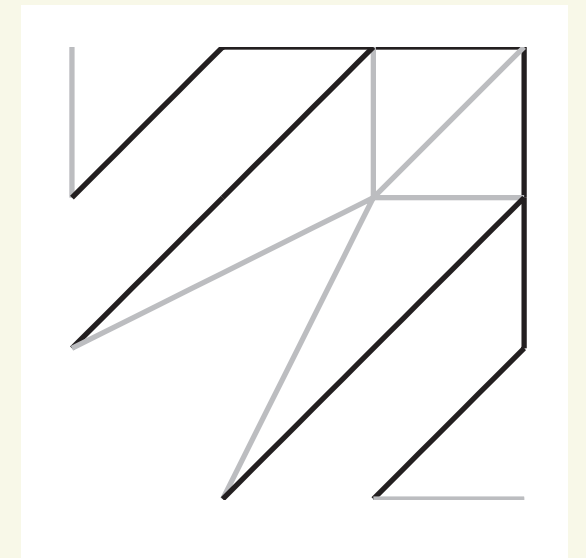
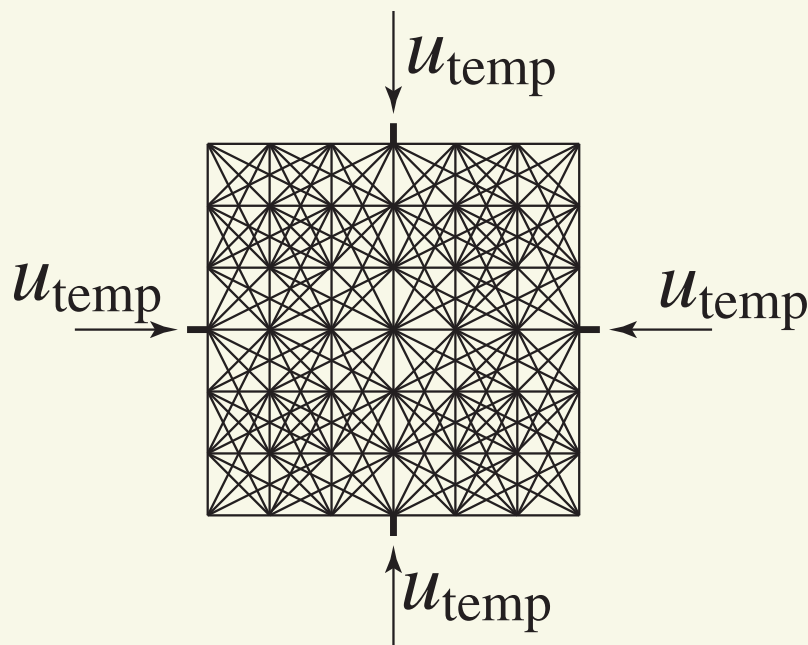
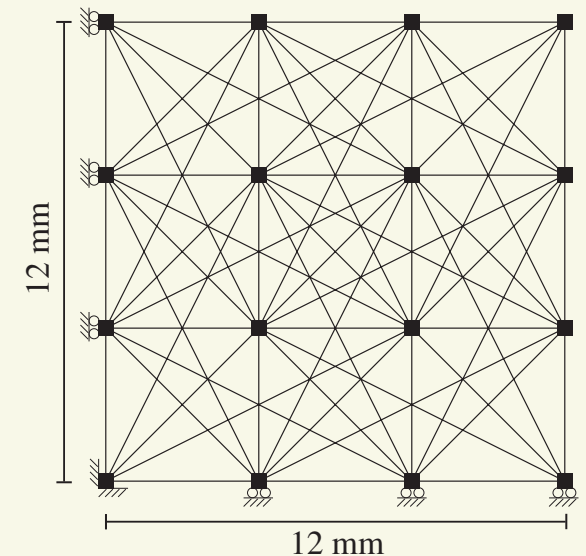
変形後

## 関連する話題：熱膨張率が負の骨組構造

- 二種類の材料（熱膨張率は正）から選択

# 関連する話題：熱膨張率が負の骨組構造

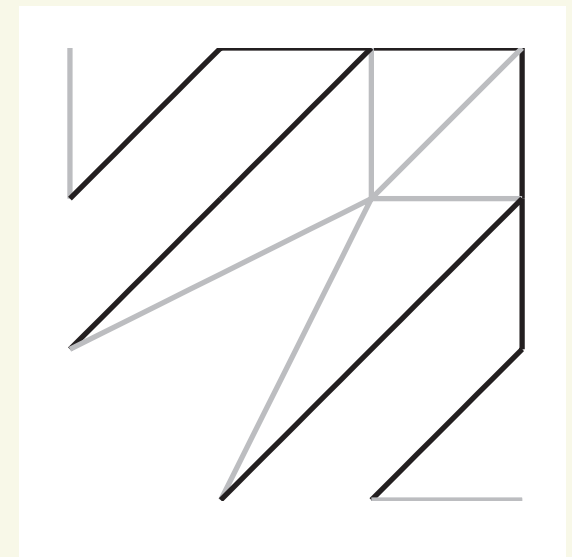
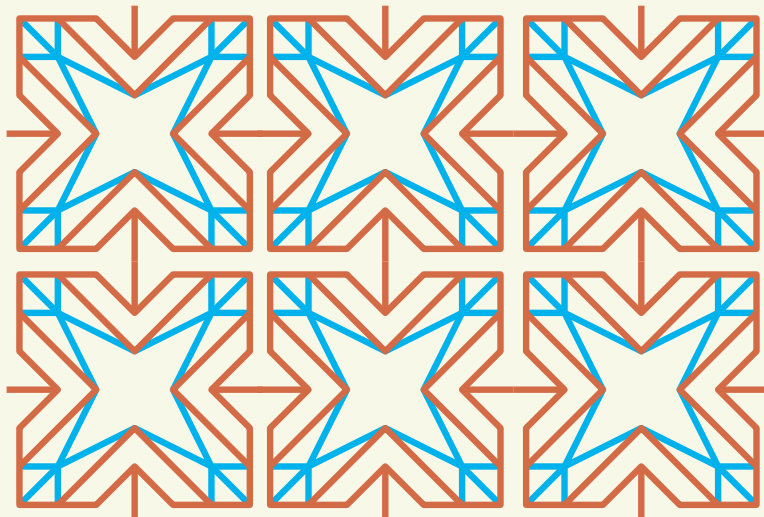
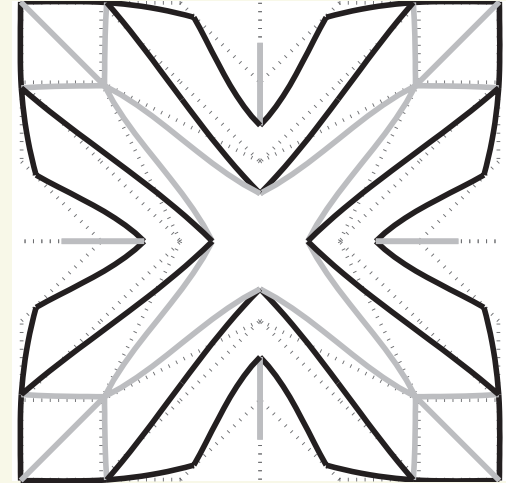
- 二種類の材料（熱膨張率は正）から選択
  - $(x_i, y_i) = (1, 0) \Leftrightarrow$  “部材  $i$  は材料 1”
  - $(x_i, y_i) = (0, 1) \Leftrightarrow$  “部材  $i$  は材料 2”
  - $(x_i, y_i) = (0, 0) \Leftrightarrow$  “部材  $i$  を除去”
- $u_{\text{temp}}$ （温度上昇時の変位）  $\rightarrow \max$





# 関連する話題：熱膨張率が負の骨組構造

- 二種類の材料（熱膨張率は正）から選択
  - $(x_i, y_i) = (1, 0) \Leftrightarrow$  “部材  $i$  は材料 1”  
A1：熱膨張率 大
  - $(x_i, y_i) = (0, 1) \Leftrightarrow$  “部材  $i$  は材料 2”  
T1：熱膨張率 小
  - $(x_i, y_i) = (0, 0) \Leftrightarrow$  “部材  $i$  を除去”
- $u_{\text{temp}}$ （温度上昇時の変位）  $\rightarrow \max$



# まとめ

- 直観に反する構造物（材料）の設計
  - → 最適化を用いる手法
- 負のポアソン比をもつ構造物
  - 骨組構造の最適設計問題として定式化
    - 出力変位の最大化
    - 混合整数計画に帰着
      - 部材断面の選択
  - 応力制約を考慮
  - 最適解は ヒンジ・細すぎる部材を含まない.
    - 後処理なしで 製造可能

← 整数変数で記述



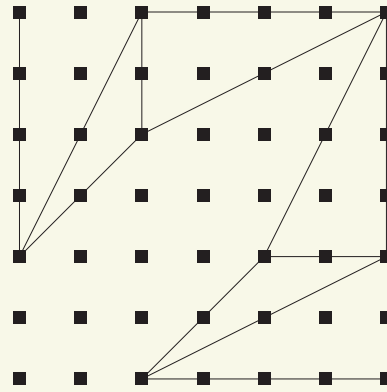
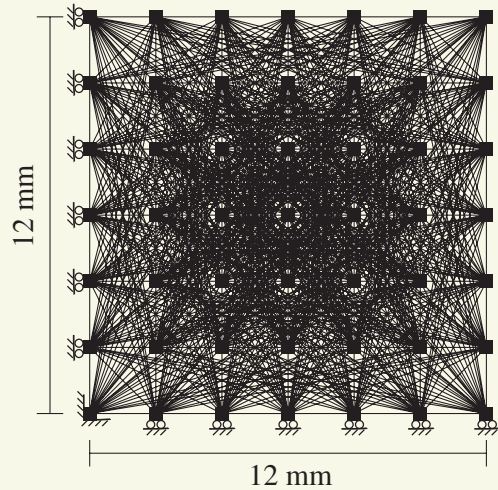
# 局所探索：大規模な問題を近似的に解く

- MIP による最適化手法
  - (大域的な) 最適性の保証
  - 大規模な問題では計算時間が膨大に
- MIP を利用した局所探索 [Stolpe & Stidsen '07] [Svanberg & Werme '07]
  - 近傍  $N(\mathbf{x}^*, r)$  内でのみ解を探索

$$N(\mathbf{x}^*, r) = \left\{ \mathbf{x} \mid \sum_{i=1}^m |x_i - x_i^*| \leq r \right\}$$

- $r$  : 近傍の半径
- $\mathbf{x}^*$  : 暫定解
- 最適性の保証はない.

## 例) 局所探索

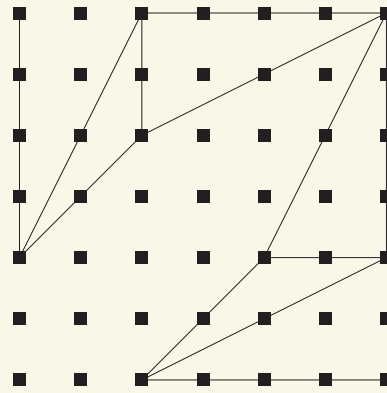
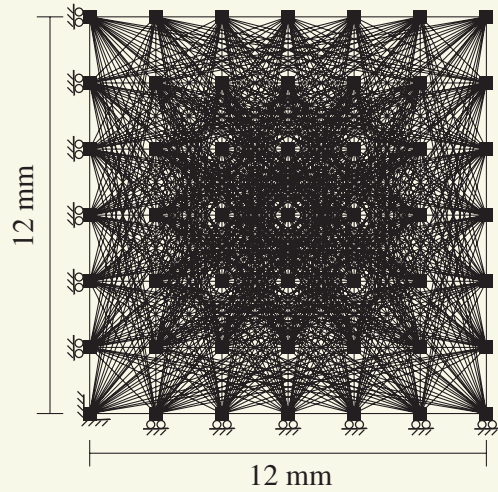


初期解

$$\nu = -0.832887$$

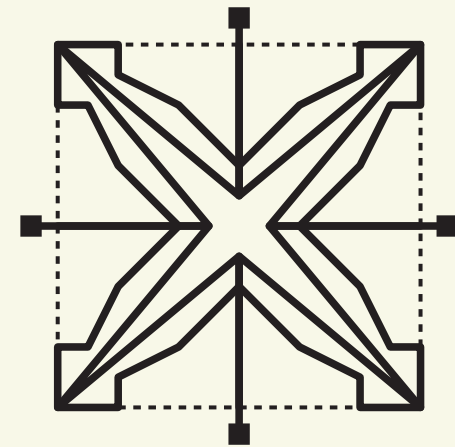
- 部材の候補 : 748 部材
- 近傍の半径  $r = 4$ 
  - 存在 / 除去 を  $r$  本まで入れ替え可

# 例) 局所探索



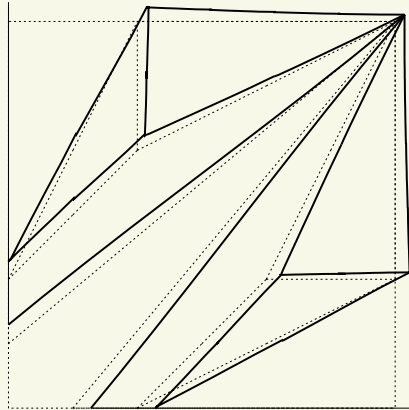
初期解

$$\nu = -0.832887$$

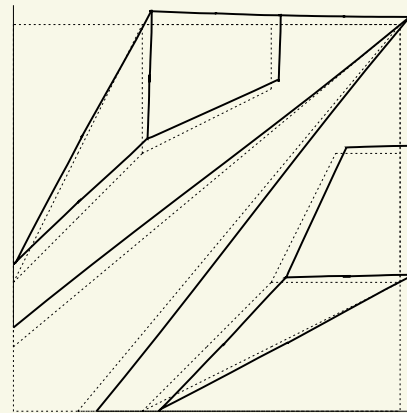


収束解  $\nu = -0.969188$

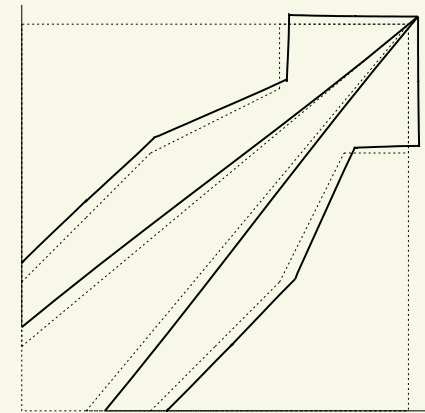
## ● 収束の履歴 :



1st step



2nd step



3rd step